Научная статья
УДК 517.968.4
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-111-138

КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Хачатур Агавардович Хачатрян[1]
Айкануш Самвеловна Петросян[2]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Национальный аграрный университет Армении, Ереван, Армения

[1]khachatur.khachatryan@ysu.am; https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
[2]haykuhi25@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Аннотация

Рассматривается класс нелинейных интегральных уравнений гаммерштейновского типа с симметричным и субстохастическим ядром. Указанный класс уравнений встречается во многих отраслях физики и математической биологии. В частности, уравнения такого характера возникают в динамической теории p-адической струны, в кинетической теории газов и в различных модельных задачах математической теории распространения эпидемических заболеваний. Доказывается конструктивная теорема существования нетривиального ограниченного неотрицательного непрерывного и монотонно неубывающего решения. В классе нетривиальных неотрицательных и ограниченных функций доказывается также единственность решения. Полученные результаты применяются для исследования нелинейного интегрального уравнения на всей прямой с почти разностным ядром. В конце работы приводятся частные примеры ядра и нелинейности, имеющие прикладной характер в вышеуказанных теориях.

Ключевые слова и фразы

вогнутость, монотонность, равномерная сходимость, ограниченное решение, свертка, предел решения, асимптотическое поведение.

Источник финансирования

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027)

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

Для цитирования

Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Конструктивное исследование разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений с симметричным ядром //*Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 111-138. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-111-138

CONSTRUCTIVE STUDY OF THE SOLVABILITY OF ONE CLASS OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH A SYMMETRIC KERNEL

Khachatur A. Khachatryan[1], Haykanush S. Petrosyan[2],

[1]Yerevan State University, Yerevan, Armenia

[2]National Agrarian University of Armenia, Yerevan, Armenia

[1]khachatur.khachatryan@ysu.am; https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
[2]haykuhi25@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Abstract

A class of nonlinear integral equations of Hammerstein type with a symmetric and substochastic kernel is considered. This class of equations is encountered in many branches of physics and mathematical biology. In particular, equations of this nature arise in the dynamic theory of a p-adic string, in the kinetic theory of gases, and in various model problems of the mathematical theory of the spread of epidemic diseases. A constructive theorem on the existence of a nontrivial bounded nonnegative continuous and monotonically nondecreasing solution is proved. In the class of nontrivial nonnegative and bounded functions, the uniqueness of the solution is also proved. The results obtained are used to study a nonlinear integral equation on the entire line with an almost difference kernel. At the end of the paper, particular examples of the kernel and nonlinearity are given that are of applied nature in the above theories.

Keywords

concavity, monotonicity, uniform convergence, bounded solution, convlution, solution limit, asymptotic behavior.

Funding

The research of the first author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project № 23RL-1A027.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

For citation

Khachatryan K. A., Petrosyan H. S., Constructive study of the solvability of one class of nonlinear integral equations with a symmetric kernel //*Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-111-138

§1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности, а также анализу некоторых качественных свойств нетривиального неотрицательного ограниченного на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ решения следующего класса нелинейных интегральных уравнений:

$$f(x) = \lambda(x) \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t) G(f(t))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $f(x)$. В уравнении (1) функция λ обладает следующими свойствами:

1) $\lambda \in C(\mathbb{R}^+),\ 0 \le \lambda(x) \le 1,\ x \in \mathbb{R}^+$,

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda(x) = 1, \ \ 1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Ядро K определено на множестве $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

a) $K \in C_0^1(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}), \quad K(-\tau) = K(\tau) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+$,

b) $\int_0^\infty K(\tau)\, d\tau = \dfrac{1}{2}, \quad \int_0^\infty \tau K(\tau)\, d\tau < +\infty$.

c) $K(\tau)$ монотонно убывает на множестве $\mathbb{R}^+$.

В условии *a)* $C_0^1(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с нулевым пределом на $\pm\infty$.

Нелинейность G в уравнении (1) удовлетворяет следующим ограничениям:

A) $G \in C(\mathbb{R}^+)$, $G(0) = 0$ и существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$,

B) $G(u)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$,

C) $G(u)$ строго вогнута на $\mathbb{R}^+$,

D) существует функция φ, отображающая отрезок $[0,1]$ в себя, со свойствами: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi \uparrow$ на $[0,1]$, $\varphi \in C[0,1]$, φ строго вогнута на $[0,1]$, причем $G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma)G(u)$, $\sigma \in [0,1]$, $u \in [0,\eta]$.

Уравнения вида (1) имеют приложения в различных направлениях естествознания. В частности, при конкретных представлениях функций λ, K и G уравнение (1) возникает в динамической теории p - адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (тахион–гипотетическая частица с массой, равной комплексному числу, движущаяся со скоростью, превышающей скорость света в вакууме), в кинетической теории газов (в рамках нелинейной модели Бхатнагара-Гросса-Крука), в математической теории распространения эпидемических заболеваний (в рамках модифицированных моделей Аткинсона-Ройтера и Дикмана-Капера)(см. [1]-[10] и ссылки в них). Уравнение (1) имеет также приложения в космологии (см., например, [11] и [12]).

В случае, когда $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, а $G(u) = \sqrt[p]{u}$, $p > 2$ — нечетное число, исследованию существования неотрицательного нетривиального и ограниченного решения уравнения (1) посвящена работа [2]. Когда $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$, $x \in \mathbb{R}$, а $G^{-1}(u) := au^3+(1-a)u$, где G^{-1} — обратная функция к функции G, а $a \in (0,1]$ — числовой параметр, аналогичные вопросы изучались в работе [4]. В работах [13]-[16] исследованы вопросы существования и единственности уравнения (1) в случае, когда $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, а K и G удовлетворяют условиям $a) - c)$ и $A) - C)$ соответственно. В этих работах доказаны теоремы существования и единственности неотрицательного нетривиального непрерывного и ограниченного решения уравнения (1) при $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, а также исследованы интегральные и обычные асимптотики построенного решения на бесконечности. Однако следует отметить, что вопрос численного решения уравнения (1) (даже для случая $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$) в указанных работах не обсуждался.

В настоящей работе с помощью специального итерационного процесса доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного нетривиального ограниченного и непрерывного решения уравнения (1) при выполнении условий $1), 2), a) - c), A) - D)$. Более того, показывается, что соответствующие последовательные приближения равномерно сходятся к этому решению со скоростью некоторой геометрической прогрессии. В случае, когда функция $\lambda(x)$ является монотонно неубывающей на $\mathbb{R}^+$ доказывается, что решение f уравнения (1) также обладает этим свойством. Для любого неотрицательного и ограниченного на $\mathbb{R}^+$ решения f

доказывается, что

$$f(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \int_0^\infty (G(f(x)) - f(x))\,dx < +\infty. \tag{2}$$

Используя соотношение (2), с помощью некоторых геометрических неравенств для вогнутых функций удается доказать единственность решения уравнения (1) в классе нетривиальных неотрицательных и ограниченных функций. Полученные результаты применяются для изучения следующего класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой:

$$F(x) = \lambda^*(x) \int_{-\infty}^\infty K(x-t)\lambda^*(t) G^*(F(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где

$$\lambda^*(x) := \lambda(|x|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad G^*(u) := \begin{cases} G(u), & \text{если} \quad u \in \mathbb{R}^+, \\ -G(-u), & \text{если} \quad u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{3*}$$

В частности, для уравнения (3) доказано наличие четырех нетривиальных ограниченных и непрерывных решений, при этом первые два решения являются нечетными и монотонными функциями на $\mathbb{R}$, а последние два - знакопостоянными и четными функциями на $\mathbb{R}$. Более того, показывается, что эти решения имеют конечные пределы на $\pm\infty$, причем разность между каждым пределом и соответствующим решением является интегрируемой функцией. В конце статьи приводятся конкретные примеры функций λ, K и G для иллюстрации важности полученных результатов.

§2. Разрешимость уравнения (1)

Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t) G(f_n(t))\,dt, \\ f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя условия $1), a)$ и $A)$, индукцией по n несложно доказать, что

$$f_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Из условий $a)$ и $c)$ легко следует, что имеет место неравенство

$$K(x-t) \geq K(x+t), \quad x, t \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

при этом когда $x, t > 0$, то

$$K(x-t) > K(x+t). \tag{7}$$

Принимая во внимание неравенство (6), а также условия $1), a), b), A)$ и $B)$, методом индукции несложно проверить также, что

$$f_n(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, \ldots; \quad f_n(x) \text{ невозрастает по } n, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Теперь убедимся, что существуют

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

В случае $n = 0$ последнее предельное соотношение выполняется очевидным образом в силу определения нулевого приближения в итерациях (4). Предположим, что предельное соотношение (9) выполняется при некотором натуральном n.

Тогда в силу (8), $1), a)$ и $b)$ будем иметь

$$0 \leq \eta - f_{n+1}(x) = \eta \int_0^\infty (K(x-t) + K(x+t))dt$$

$$-\lambda(x) \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)G(f_n(t))\,dt$$

$$\leq \eta\lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)dt + \eta(1-\lambda(x))$$

$$+2\eta \int_x^\infty K(\tau)d\tau - \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)G(f_n(t))\,dt$$

$$\leq \eta(1-\lambda(x)) + 2\eta \int_x^\infty K(\tau)d\tau$$

$$+\eta \int_0^\infty K(x-t)(1-\lambda(t))dt + \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)(\eta - G(f_n(t)))\,dt$$

$$\leq \eta(1-\lambda(x))$$

$$+2\eta \int_x^\infty K(\tau)d\tau + \eta \int_0^\infty K(x-t)(1-\lambda(t))dt + \int_0^\infty K(x-t)(\eta - G(f_n(t)))\,dt$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + \int_0^\infty K(x-t)(\eta - G(f_n(t)))\,dt.$$

Из условий 2) и $a)$ немедленно следует, что $I_1 := \eta(1-\lambda(x)) \to 0$, $I_2 := 2\eta \int_x^\infty K(\tau)\,d\tau \to 0$ при $x \to +\infty$.

Так как $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_0^1(\mathbb{R})$, $1-\lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda(x) = 1$, то в силу известного предельного соотношения в операции свертки (см. [17]) будем иметь

$$I_3 := \eta \int_0^\infty K(x-t)(1-\lambda(t))\,dt \to \eta \int_{-\infty}^\infty K(y)\,dy \cdot \lim_{t\to+\infty} (1-\lambda(t)) = 0$$

при $x \to +\infty$.

Учитывая непрерывность функции G на $\mathbb{R}^+$, соотношение $G(\eta) = \eta$ и снова используя предельное соотношение в операции свертки, в силу индукционного предположения получим

$$\int_0^\infty K(x-t)(\eta - G(f_n(t)))\,dt \to \int_{-\infty}^\infty K(y)\,dy \cdot \lim_{t\to+\infty} (\eta - G(f_n(t))) = 0,$$

при $x \to +\infty$. Следовательно, из полученного выше неравенства приходим к предельному соотношению (9).

Убедимся теперь, что существует число $\sigma_0 \in (0,1)$ такое, что имеет место неравенство снизу

$$f_2(x) \geq \sigma_0 f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{10}$$

Так как $f_n(0) = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ в силу условия $a)$, то (10) выполняется при $x = 0$. Докажем теперь неравенство (10) для положительных x.

Рассмотрим следующую функцию на множестве $(0, +\infty)$: $B(x) :=$

$$= \frac{\int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t) G(\eta\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-y) - K(t+y))\lambda(y)\,dy)dt}{\eta \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\,dt},$$

$x \in (0, +\infty)$. Из условий $a), b), c), 1), 2), A), B)$ и неравенства (7) немедленно следует, что

$$B(x) \leq 1, \quad x \in (0, +\infty). \tag{11}$$

Используя теорему Лопиталя, вычислим предел функции $B(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to0^+} B(x) =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to0^+} \int_0^\infty (K'(x-t) - K'(x+t))\lambda(t) G(\eta\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-y) - K(t+y))\lambda(y)\,dy)dt}{\eta \lim\limits_{x\to0^+} \int_0^\infty (K'(x-t) - K'(x+t))\lambda(t)\,dt}$$

$$= \frac{\int_0^\infty (K'(-t) - K'(t))\lambda(t) G(\eta\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-y) - K(t+y))\lambda(y)\,dy)dt}{\eta \int_0^\infty (K'(-t) - K'(t))\lambda(t)\,dt}$$

$$= -\frac{2}{\eta}\frac{\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)G(\eta\lambda(t)\int_0^\infty(K(t-y)-K(t+y))\lambda(y)dy)dt}{-2\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)\,dt}$$

$$\leq \frac{1}{\eta}\frac{\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)G(\eta\lambda(t)(1-2\int_t^\infty K(\tau))d\tau)dt}{\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)\,dt} <$$

$$< \frac{1}{\eta}\frac{\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)G(\eta\lambda(t))\,dt}{\int_0^\infty K'(t)\lambda(t)\,dt} \leq 1,$$

откуда в силу $1), 2), a) - c)$ и (7) получаем, что

$$0 < \lim_{x\to 0^+} B(x) < 1. \tag{12}$$

С другой стороны, принимая во внимание предельные соотношения (9) и определение функции $B(x)$, в силу (4) можно утверждать, что существует

$$\lim_{x\to+\infty} B(x) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)} = 1. \tag{13}$$

Заметим теперь, что $B(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$. Действительно, так как функция $\lambda(t)$ обладает свойствами $1), 2)$, то существует $r > 0$ такое, что

$$\lambda(t) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{при} \quad t > r. \tag{14}$$

В силу условий $a) - c)$ из (14) и (7) будем иметь

$$\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\lambda(t)G(\eta\lambda(t)\int_0^\infty (K(t-y)-K(t+y))\lambda(y)\,dy)dt$$

$$\geq \int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\lambda(t)G(\frac{\eta\lambda(t)}{2}\int_r^\infty (K(t-y)-K(t+y))\,dy)dt$$

$$\geq \int_r^\infty (K(x-t)-K(x+t))\lambda(t)G(\frac{\eta\lambda(t)}{2}\int_r^\infty (K(t-y)-K(t+y))\,dy)dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_r^\infty (K(x-t)-K(x+t))G(\frac{\eta}{4}\int_r^\infty (K(t-y)-K(t+y))\,dy)dt := B^*(x) > 0,$$

$$\text{при } x > 0.$$

Следовательно,

$$B(x) \geq \frac{B^*(x)}{\eta(1-2\int_x^\infty K(y)\,dy)} > 0 \text{ при } x > 0. \tag{15}$$

Поскольку $\lambda \in C(\mathbb{R}^+)$, $K \in C(\mathbb{R})$, $G \in C(\mathbb{R}^+)$, то в силу (12) и (15) функцию $B(x)$ можно считать непрерывной на множестве $\mathbb{R}^+$. Из (11), (12), (13) и (15) следует, что существует число $r_0 > 0$ такое, что при $x > r_0$ имеет место неравенство $B(x) \geq \dfrac{1}{2}$. На отрезке $[0, r_0]$ применяя теорему Вейерштрасса и при этом используя (12) и (15), можно утверждать, что существует $x_0 \in [0, r_0]$ такое, что $\min\limits_{x \in [0, r_0]} B(x) = B(x_0) > 0$. Положим $\sigma_0 := \min\{B(x_0), \frac{1}{2}\} \in (0, 1)$. Тогда очевидным образом приходим к неравенству:

$$\int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t) G(\eta\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-y) - K(t+y))\lambda(y)\, dy) dt \\ \geq \sigma_0 \eta \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{16}$$

Умножая обе части (16) на функцию $\lambda(x)$ и используя формулу последовательных приближений (4), получаем неравенство (10). Из (10) и (8) немедленно следует, что

$$\sigma_0 f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда в силу монотонности отображения G немедленно следует, что

$$G(\sigma_0 f_1(t)) \leq G(f_2(t)) \leq G(f_1(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Принимая во внимание условие $D)$, в силу доказанных неравенств $0 \leq f_1(t) \leq \eta$, $t \in \mathbb{R}^+$, $0 < \sigma_0 < 1$ из (17) приходим к оценкам

$$\varphi(\sigma_0) G(f_1(t)) \leq G(f_2(t)) \leq G(f_1(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

Умножим обе части (18) на функцию $\lambda(x)(K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)$, где $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Тогда, учитывая условие 1), неравенство (6) и соотношение (4), после интегрирования полученного неравенства по t от 0 до $+\infty$ приходим к оценке

$$\varphi(\sigma_0) f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{19}$$

В силу условия $B)$ из (19) следует, что

$$G(\varphi(\sigma_0) f_2(t)) \leq G(f_3(t)) \leq G(f_2(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Поскольку $0 \leq f_2(t) \leq \eta$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(\sigma_0) \in (0, 1)$, то в силу условия $D)$ из (20) получаем, что

$$\varphi(\varphi(\sigma_0)) G(f_2(t)) \leq G(\varphi(\sigma_0) f_2(t)) \leq G(f_3(t)) \leq G(f_2(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{21}$$

Умножая обе части (21) снова на функцию $\lambda(x)(K(x-t)-K(x+t))\lambda(t)$ и интегрируя полученное неравенство по t на $(0,+\infty)$, с учетом (4) и (6) приходим к двойному неравенству:

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))f_3(x) \le f_4(x) \le f_3(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Продолжая этот процесс на n-ом шаге получаем следующее двустороннее неравенство:

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma_0))}_{n} f_{n+1}(x) \le f_{n+2}(x) \le f_{n+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{22}$$

Положим $F_n(\sigma) := \underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma))}_{n}$, $\sigma \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда очевидно, что

$$F_n(\sigma) \le 1, \quad \sigma \in [0,1], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Ниже убедимся, что существуют константы $C > 0$ и $k \in (0,1)$ такие, что

$$1 - F_n(\sigma_0) \le Ck^n. \tag{24}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ — произвольное число. Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1,1)$ и $(\varepsilon\sigma_0, \varphi(\varepsilon\sigma_0))$. Из вогнутости $F_1(\sigma) := \varphi(\sigma)$ сразу следует, что

$$F_1(\sigma_0) \ge k\sigma_0 + 1 - k, \tag{25}$$

где

$$k := \frac{1-\varphi(\varepsilon\sigma_0)}{1-\varepsilon\sigma_0} \in (0,1). \tag{26}$$

Учитывая (25), (26) и определение функций $\{F_n(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$, будем иметь

$$F_2(\sigma_0) = \varphi(F_1(\sigma_0)) \ge \varphi(k\sigma_0 + 1 - k) \ge k(k\sigma_0 + 1 - k) + 1 - k = k^2\sigma_0 + 1 - k^2.$$

Продолжая данную процедуру на n-ом шаге, приходим к оценке

$$F_n(\sigma_0) \ge k^n\sigma_0 + 1 - k^n.$$

Следовательно, имеет место (24), где k задается по формуле (26), а

$$C := 1 - \sigma_0.$$

Используя (23), (24), (26) и (8) из (22) получаем, что

$$0 \le f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \le C\eta k^n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Из (27) следует равномерная сходимость последовательных приближений (4): $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем в силу (5) имеем

$$f \in C(\mathbb{R}^+).$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \eta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то принимая во внимание соотношение

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

и тот факт, что ряд (28) сходится равномерно (в силу (27)), будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) = \eta.$$

Таким образом, на основе изложенного выше можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *При выполнении условий* $1), 2), a) - c)$ *и* $A) - D)$ *уравнение* (1) *имеет неотрицательное непрерывное и ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *решение* $f(x)$, *являющееся равномерным пределом последовательных приближений* (4), *при этом для этих приближений имеет место оценка* (27). *Более того, существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$.

Замечание 1. Записывая (27) для индексов $n+2, n+3, \ldots, n+m$, $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ и складывая полученные неравенства, приходим к оценке

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_{n+m+1}(x) \leq C\eta(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+m-1}) \leq \frac{C\eta k^n}{1-k}, \quad x \in \mathbb{R}^+, n = 1, 2, \ldots, m = 2, 3, \ldots. \tag{28}$$

В (28) устремляя $m \to \infty$, получаем следующую равномерную оценку:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f(x) \leq \frac{C\eta k^n}{1-k},\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 2. Заметим теперь, что если функция $\lambda(x)$, помимо условий 1) и 2), обладает также свойством монотонности:

3) из $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 > x_2 \Rightarrow \lambda(x_1) \geq \lambda(x_2)$,

то $f(x_1) \geq f(x_2)$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

Действительно, записывая итерации (4) в следующем виде

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x)=\lambda(x)\int_{-\infty}^{x}K(t)\lambda(x-t)G(f_n(x-t))dt \\ -\lambda(x)\int_0^\infty K(x+t)\lambda(t)G(f_n(t))\,dt, \\ f_0(x)\equiv\eta,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad n=0,1,2,\dots \end{gathered}\tag{29}$$

индукцией по n сначала докажем, что $f_n(x_1)\geq f_n(x_2)$, $n=0,1,2,\dots$. В случае $n=0$ данное соотношение выполняется очевидным образом. Предположим, что $f_n(x_1)\geq f_n(x_2)$ для некоторого натурального n. Тогда используя $3), a), 1), c), A)$ и $B)$ из (29) будем иметь

$$\begin{aligned} &f_{n+1}(x_1)\\ &=\lambda(x_1)\left(\int_{-\infty}^{x_1}K(t)\lambda(x_1-t)G(f_n(x_1-t))dt-\int_0^\infty K(x_1+t)\lambda(t)G(f_n(t))\,dt\right)\\ &\geq\lambda(x_2)\left(\int_{-\infty}^{x_1}K(t)\lambda(x_1-t)G(f_n(x_1-t))\,dt-\int_0^\infty K(x_1+t)\lambda(t)G(f_n(t))\,dt\right)\\ &\geq\lambda(x_2)\left(\int_{-\infty}^{x_2}K(t)\lambda(x_2-t)G(f_n(x_2-t))\,dt-\int_0^\infty K(x_2+t)\lambda(t)G(f_n(t))\,dt\right)\\ &=f_{n+1}(x_2). \end{aligned}$$

В неравенстве $f_n(x_1)\geq f_n(x_2)$ устремляя $n\to\infty$, приходим к неравенству $f(x_1)\geq f(x_2)$.

Имеет место также следующая теорема об интегральной асимптотике построенного решения.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 решение $f(x)$ уравнения* (1), *построенное при помощи итераций* (4), *обладает интегральной асимптотикой $\eta-f\in L_1(\mathbb{R}^+)$.*

Доказательство. Сперва запишем следующее неравенство полученное при доказательстве теоремы 1:

$$0\leq\eta-f_{n+1}(x)\leq\eta(1-\lambda(x))+2\eta\int_x^\infty K(t)dt+\eta\int_0^\infty K(x-t)(1-\lambda(t))\,dt$$
$$+\int_0^\infty K(x-t)(\eta-G(f_n(t)))\,dt,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad n=0,1,2,\dots.$$

Учитывая условия $2), b), a)$, в силу того, что $f_n\in C(\mathbb{R}^+)$, $n=0,1,2,\dots$ для всякого положительного $r>0$ будем иметь

$$0\leq\int_0^r(\eta-f_{n+1}(x))\,dx\leq\eta\int_0^\infty(1-\lambda(x))dx+2\eta\int_0^\infty tK(t)\,dt+\eta\int_0^\infty(1-\lambda(t))\,dt$$

$$+\int_0^r\int_0^r K(x-t)(\eta-G(f_n(t)))\,dtdx+\eta\int_0^r\int_r^\infty K(x-t)\,dtdx$$
$$=C_1+\eta\int_0^r\int_r^\infty K(t-x)\,dtdx+\int_0^r\int_0^r K(x-t)(\eta-G(f_n(t)))\,dtdx:=I,$$

где $C_1:=2\eta\left(\int_0^\infty(1-\lambda(x))\,dx+\int_0^\infty tK(t)\,dt\right)$.

Оценим теперь интеграл

$$\eta\int_0^r\int_r^\infty K(t-x)\,dtdx.$$

Используя теорему Фубини (см. [18]) и условие b), имеем

$$\eta\int_0^r\int_r^\infty K(t-x)dtdx=\eta\int_0^r\int_{r-x}^\infty K(y)dydx=\eta\int_0^r\int_\tau^\infty K(y)\,dyd\tau$$
$$=\eta\int_0^r\int_\tau^r K(y)dyd\tau+\eta\int_0^r\int_r^\infty K(y)\,dyd\tau=\eta\int_0^r K(y)y\,dy$$
$$+\eta\int_r^\infty K(y)r\,dy\le\eta\int_0^\infty yK(y)\,dy<+\infty.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству:

$$\begin{aligned}0\le\int_0^r(\eta-f_{n+1}(x))\,dx&\le C_1+\eta\int_0^\infty yK(y)dy\\&+\int_0^r\int_0^r K(x-t)(\eta-G(f_n(t)))\,dtdx.\end{aligned}\tag{30}$$

Используя условия $a), b), B)$ и неравенство $f_{n+1}(x)\le f_n(x)$, $x\in\mathbb{R}^+$, из (30) получим

$$0\le\int_0^r(\eta-f_{n+1}(x))\,dx\le C_1+\eta\int_0^\infty yK(y)\,dy+\int_0^r(\eta-G(f_{n+1}(t)))\,dt,$$

откуда следует, что

$$0\le\int_0^r(G(f_{n+1}(x))-f_{n+1}(x))\,dx\le C_1+\eta\int_0^\infty yK(y)\,dy.$$

В последнем неравенстве устремляя число $r\to\infty$, получаем

$$0\le\int_0^\infty(G(f_{n+1}(x))-f_{n+1}(x))\,dx\le C_0,\tag{31}$$

где

$$C_0:=C_1+\eta\int_0^\infty yK(y)\,dy.$$

В (31) устремляя $n \to \infty$, приходим к оценке:

$$0 \le \int_0^\infty (G(f(x)) - f(x))\, dx \le C_0. \tag{32}$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, то существует число $r_0 > 0$ такое, что при $x \ge r_0$ имеет место неравенство $f(x) \ge \frac{\eta}{2}$. Следовательно, принимая во внимание условия $a) - c)$, будем иметь

$$\eta - G(f(x)) \le \frac{\eta - G(\frac{\eta}{2})}{\frac{\eta}{2}}(\eta - f(x)), \quad x \ge r_0. \tag{33}$$

Учитывая (33), из (32) приходим к неравенству

$$\int_{r_0}^\infty (\eta - f(x))\, dx \le \frac{\eta C_0}{2(G(\frac{\eta}{2}) - \frac{\eta}{2})}.$$

Так как $f \in C(\mathbb{R}^+)$, то $\eta - f \in L_1(0, r_0)$. Таким образом, $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и, следовательно, теорема доказана. $\square$

§3. Решения уравнения (3)

Начнем изложение данного параграфа с проверки следующего простого факта: если $f(x)$ является решением уравнения (1) (построенное, например, при помощи последовательных приближений (4)), то функция

$$F^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ -f(-x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{34}$$

будет удовлетворять уравнению (3). Действительно, принимая во внимание условие $a)$, а также формулы (1) и (3*), из (3) будем иметь

если $x \ge 0$, то

$$\lambda^*(x) \int_{-\infty}^\infty K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\, dt$$

$$= \lambda(x) \left(\int_{-\infty}^0 K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\, dt + \int_0^\infty K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\, dt \right)$$

$$= \lambda(x) \left(\int_{-\infty}^0 K(x-t)\lambda(-t)G^*(-f(-t))\, dt + \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)G^*(f(t))\, dt \right)$$

$$= \lambda(x) \left(\int_0^\infty K(x+\tau)\lambda(\tau)G^*(-f(\tau))\, d\tau + \int_0^\infty K(x-\tau)\lambda(\tau)G^*(f(\tau))\, d\tau \right)$$

$$= \lambda(x)\left(\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\lambda(t)G(f(t))\,dt\right) = f(x) = F^*(x),$$

а если $x<0$, то

$$\lambda^*(x)\int_{-\infty}^\infty K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\,dt$$

$$= \lambda(-x)\left(\int_{-\infty}^0 K(x-t)\lambda(-t)G^*(-f(-t))\,dt + \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)G^*(f(t))\,dt\right)$$

$$= \lambda(-x)\left(-\int_0^\infty K(x+t)\lambda(t)G(f(t))dt + \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)G(f(t))\,dt\right)$$

$$= -\lambda(-x)\left(\int_0^\infty (K(-x-t)-K(-x+t))\lambda(t)G(f(t))\,dt\right) = -f(-x) = F^*(x).$$

Из нечетности функции G^* немедленно следует, что функция $\tilde{F}(x) := -F^*(x)$, $x\in\mathbb{R}$ также удовлетворяет уравнению (3). Ниже убедимся, что при дополнительном ограничении

4) $\lambda(x)\not\equiv 1, \quad x\in\mathbb{R}^+$

уравнение (3) имеет также знакопостоянные нетривиальные непрерывные четные и ограниченные на $\mathbb{R}$ решения.

С этой целью рассмотрим итерации:

$$F^*_{n+1}(x) = \lambda^*(x)\int_{-\infty}^\infty K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*_n(t))\,dt, \qquad F^*_0(x)\equiv\eta, \quad x\in\mathbb{R}, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{35}$$

Индукцией по n несложно проверить, что

$$F^*_n\in C(\mathbb{R}), \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{36}$$

$$F^*_n(x) \text{ монотонно невозрастают по } n. \tag{37}$$

Проверим теперь, что

$$F^*_n(-x) = F^*_n(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{38}$$

В случае $n=0$ соотношение (38) выполняется очевидным образом. Предположим, что (38) имеет место при некотором натуральном n. Тогда из (35) в силу (3*) будем иметь

$$F^*_{n+1}(-x) = \lambda^*(-x)\int_{-\infty}^\infty K(-x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*_n(t))\,dt$$

$$= \lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-(-t))\lambda^*(-t)G^*(F_n^*(-t))\,dt$$

$$= \lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\tau)\lambda^*(\tau)G^*(F_n^*(\tau))\,d\tau = F_{n+1}^*(x).$$

Докажем теперь следующую оценку снизу для последовательных приближений (35):

$$F_n^*(x) \geq |F^*(x)|, \quad x\in\mathbb{R}, \quad n=0,1,2,\dots. \tag{39}$$

где $F^*(x)$ задается согласно формуле (34) и является решением уравнения (3).

При $n=0$ неравенство (39) сразу следует из (34) и (8). Предполагая, что (39) имеет место при некотором натуральном n и используя (3), (3*), из (35) получим

$$F_{n+1}^*(x) \geq \lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda^*(t)G^*(|F^*(t)|)\,dt$$

$$= \lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda^*(t)|G^*(F^*(t))|\,dt$$

$$\geq \lambda^*(x)\left|\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\,dt\right|$$

$$= \left|\lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda^*(t)G^*(F^*(t))\,dt\right| = |F^*(x)|, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, в силу (36)-(39) последовательность четных непрерывных функций $\{F_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^*(x) =: F^\sharp(x)$, причем предельная функция $F^\sharp(x)$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$|F^*(x)| \leq F^\sharp(x) \leq \eta, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{40}$$

Из условия 4) сразу следует, что $F^\sharp(x)\not\equiv\eta$. Используя теорему Б. Леви (см. [18]), (37) и (39) легко можно убедиться, что предельная функция $F^\sharp(x)$ удовлетворяет уравнению (3). Из 1), a) и (3*) получаем также, что

$$F^\sharp \in C(\mathbb{R}). \tag{41}$$

Ниже докажем, что для $F^\sharp$ на самом деле имеет место следующее строгое неравенство: $F^\sharp(x)<\eta,\ x\in\mathbb{R}$, если только $\lambda(x)>0, \quad x\in\mathbb{R}$.

Действительно, так как $F^\sharp(x)\not\equiv\eta$ и $F^*(x)\leq\eta$, то из (41) следует, что существуют числа $x_0\in\mathbb{R}$ и $\delta_0>0$ такие, что при $x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$

имеет место $F^\sharp(x) < \eta$. Следовательно, из (3) в силу условий $A), B), a)$ и $\lambda(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$F^\sharp(x) < \lambda^*(x)\eta \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} K(x-t)\lambda^*(t)dt + \lambda^*(x)\eta \int_{\mathbb{R}\setminus(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)} K(x-t)\lambda^*(t)\,dt$$

$$= \eta\lambda^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda^*(t)dt \leq \eta \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\,dt = \eta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В (38) устремляя число $n \to \infty$, получаем четность построенного решения $F^\sharp(x)$.

Если $f(x)$ — решение уравнения (1), построенное при помощи последовательных приближений (4), то согласно теорем 1 и 2 имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty} F^*(x) = \pm\eta, \quad \lim_{x\to\pm\infty} F^\sharp(x) = \eta, \tag{42}$$

$$\eta \pm F^* \in L_1(\mathbb{R}^\mp), \quad \eta - F^\sharp \in L_1(\mathbb{R}), \tag{43}$$

где $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$. Здесь также следует отметить, что функция $\tilde{F}^\sharp(x) := -F^\sharp(x)$ тоже удовлетворяет уравнению (3).

На рисунке 1 изображены приближенные графики этих четырех решений уравнения (3).

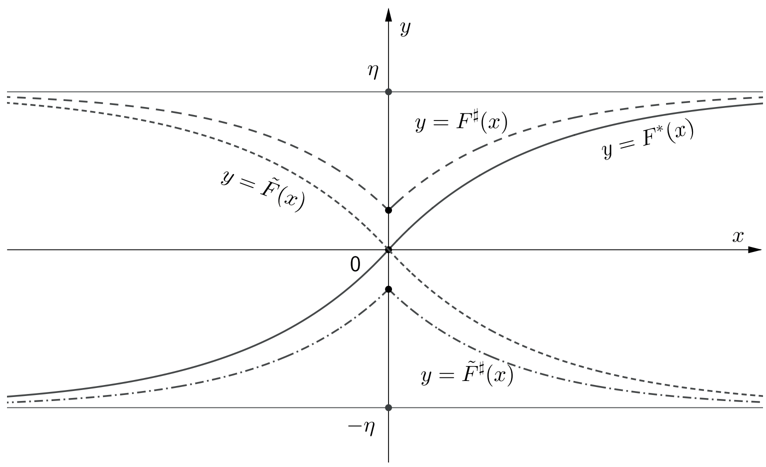

Рис. 1. Приближенные графики функций $F^*(x), \tilde{F}(x), F^\sharp(x), \tilde{F}^\sharp(x)$.

Таким образом, мы доказали следующий результат:

Теорема 3. *При выполнении условияй* $1), 2), 4), a) - c)$ *и* $A) - D)$ *уравнение* (3) *обладает четырьмя нетривиальными непрерывными и ограниченными решениями* $\pm F^*(x)$ *и* $\pm F^\sharp(x)$, *причем* $F^*(x)$ *является нечетной функцией, а* $F^\sharp(x)$ *— четной. Более того,* F^* *и* $F^\sharp$ *обладают свойствами* (40), (42) *и* (43). *Если* $\lambda(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, *то* $F^\sharp(x) < \eta$, $x \in \mathbb{R}$.

§4. Достаточные условия единственности решения уравнения (1), примеры.

В этом параграфе дополнительно предположим, что выполняется условие
$$\lambda(x) > 0, \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{44}$$
Пусть $f^*(x)$ — произвольное неотрицательное тождественно ненулевое и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение уравнения (1). Несложно проверить, что тогда
$$f^*(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{45}$$
Действительно, если обозначить через $c^* := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f^*(x)$, то $c^* > 0$ и в силу условий $1), a), b), c), A), B)$ и неравенства (6) получим, что
$$f^*(x) \leq G(c^*)\lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)\,dt \leq G(c^*), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$
откуда следует, что $c^* \leq G(c^*)$. С другой стороны, так как функция $\dfrac{G(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$ (см. условия $A) - C)$), то из условий $A)$ и $B)$ сразу получаем, что $c^* \leq \eta$. Поскольку $\lambda \in C(\mathbb{R}^+)$, $K \in C(\mathbb{R})$ и $G \in C(\mathbb{R}^+)$, то из (1) в силу ограниченности и неотрицательности f^* на $\mathbb{R}^+$ сразу следует, что
$$f^* \in C(\mathbb{R}^+). \tag{46}$$
Убедимся теперь, что
$$f^*(x) > 0 \text{ при } \quad x > 0. \tag{47}$$
На самом деле, так как $f^*(x) \geq 0$, $f^*(x) \not\equiv 0$ и $f^*(0) = 0$, то в силу (46) существуют числа $x^* > 0$ и $\delta \in (0, x^*)$ такие, что $\inf\limits_{x\in(x^*-\delta, x^*+\delta)} f^*(x) > 0$. Следовательно, используя (44), (7) и условие $B)$, из (1) имеем
$$f^*(x) \geq \lambda(x)\int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)G(f^*(t))\,dt$$
$$\geq \lambda(x)G\left(\inf_{t\in(x^*-\delta,x^*+\delta)} f^*(t)\right)\int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta}(K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\,dt > 0,$$
при $x > 0$.

Совершая аналогичные преобразования как при доказательствах теорем 1 и 2 для произвольного $r > 0$ получим

$$0 \leq \int_0^r (\eta - f^*(x))\, dx \leq C_0 + \int_0^r (\eta - G(f^*(t)))\, dt,$$

откуда в силу (45) и (47) имеем

$$0 \leq \int_0^r (G(f^*(x)) - f^*(x))\, dx \leq C_0.$$

В последнем неравенстве устремляя $r \to \infty$, приходим к включению

$$G(f^*(x)) - f^*(x) \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{48}$$

Займемся теперь вопросом единственности решения уравнения (1).

Имеет место

Теорема 4. *При выполнении условий* $1), 2), a) - c), A) - D)$ *и* (44) *уравнение* (1) *в классе неотрицательных нетривиальных и ограниченных на* $\mathbb{R}^+$ *функций не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (1), кроме решения $f(x)$ построенное при помощи последовательных приближений (4), имеет также другое решение $f^*(x)$. Принимая во внимание неравенства (6), (45) и монотонность функции G, индукцией по n несложно убедиться, что

$$f_n(x) \geq f^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{49}$$

В (49) устремляя число $n \to \infty$, приходим к неравенству

$$f(x) \geq f^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{50}$$

Предположим, что $f(x) \not\equiv f^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, тогда в силу (50), соотношения $f(0) = f^*(0) = 0$ и непрерывности этих функций существуют числа $x_1 > 0$ и $\delta_1 \in (0, x_1)$ такие, что

$$f(x) > f^*(x), \quad x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ следующее множество

$$\mathfrak{M} := \{x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) > f^*(x)\}. \tag{51}$$

Заметим, что $0 \notin \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, $mes\mathfrak{M} \geq 2\delta_1 > 0$, ибо $f(0) = f^*(0) = 0$ и $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \subset \mathfrak{M}$. Принимая во внимание (50) имеем

$$\begin{gathered} 0 \leq f(x) - f^*(x) \\ = \lambda(x) \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)(G(f(t)) - G(f^*(t)))\, dt. \end{gathered} \tag{52}$$

Умножим обе части (52) на функцию $G(f^*(x)) - f^*(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$. Учитывая включение (48), условия 1) и a), в силу теоремы Фубини после интегрирования полученного равенства по x от 0 до $+\infty$ будем иметь

$$0 \leq \int_0^\infty (G(f^*(x)) - f^*(x))(f(x) - f^*(x))\,dx =$$

$$\int_0^\infty (G(f^*(x)) - f^*(x))\lambda(x) \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)(G(f(t)) - G(f^*(t)))\,dtdx$$

$$= \int_0^\infty (G(f(t)) - G(f^*(t)))\Big(\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)G(f^*(x))\,dx$$

$$-\lambda(t) \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)f^*(x)dx\Big)\,dt =$$

$$\int_0^\infty (G(f(t)) - G(f^*(t)))\left(f^*(t) - \lambda(t) \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)f^*(x)\,dx\right)dt.$$

В силу определения множества $\mathfrak{M}$ последнее соотношение можно переписать в следующей форме:

$$\begin{gathered}\int_{\mathfrak{M}} (G(f^*(x)) - f^*(x))(f(x) - f^*(x))\,dx \\ = \int_{\mathfrak{M}} (G(f(t)) - G(f^*(t))) \\ \cdot\left(f^*(t) - \lambda(t) \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)f^*(x)\,dx\right)dt.\end{gathered} \tag{53}$$

Обозначим через Q обратную функцию к функции G на множестве $\mathbb{R}^+$. Из свойств $A) - C)$ функции G немедленно следует, что

$$Q \in C(\mathbb{R}^+), \quad Q(0) = 0, \quad Q(\eta) = \eta,$$

$$Q \text{ монотонно возрастает и строго выпукла на } \mathbb{R}^+.$$

Тогда в силу интегрального аналога неравенства Йенсена (см. [19]) для всех $t \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\begin{gathered}\int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)f^*(x)\,dx \\ = \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)Q(G(f^*(x)))\,dx \\ \geq \int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)\,dx \\ \cdot Q\left(\frac{\int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)G(f^*(x))\,dx}{\int_0^\infty (K(t-x) - K(t+x))\lambda(x)\,dx}\right) := I(t),\end{gathered} \tag{54}$$

ибо при $t \in \mathfrak{M}$ в силу (7), (44), $a)$ и $b)$ имеет место

$$1 \geq \int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)\,dx \geq \int_1^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)\,dx > 0.$$

Используя следущее легко проверяемое неравенство

$$vQ(u) \geq Q(uv), \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad v \in [0,1]. \tag{55}$$

и в качестве v и u выбрав

$$v := \int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)\,dx, \quad t \in \mathfrak{M},$$

$$u := \frac{\int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)G(f^*(x))\,dx}{\int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)\,dx}, \quad t \in \mathfrak{M}$$

из (54) приходим к неравенству

$$I(t) \geq Q\left(\int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)G(f^*(x))\,dx\right), \quad t \in \mathfrak{M}. \tag{56}$$

Поскольку при $t \in \mathfrak{M}$ функция $0 < \lambda(t) \leq 1$ (ибо $0 \notin \mathfrak{M}$, а $\lambda(t) > 0$ при $t > 0$), то из (1), (55) и (56) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda(t)I(t) &\geq \lambda(t)Q\left(\int_0^\infty (K(t-x)-K(t+x))\lambda(x)G(f^*(x))\,dx\right) \\ &= \lambda(t)Q\left(\frac{f^*(t)}{\lambda(t)}\right) \geq Q(f^*(t)), \quad t \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \tag{57}$$

Итак, из (53) и (57) приходим к следующему неравенству:

$$\int_{\mathfrak{M}} (G(f^*(x)) - f^*(x))(f(x) - f^*(x))\,dx$$

$$\leq \int_{\mathfrak{M}} (G(f(t)) - G(f^*(t)))(f^*(t) - Q(f^*(t)))\,dt$$

или в силу неравенств $0 < f^*(t) < f(t) \leq \eta$, $t \in \mathfrak{M}$ (см. (51), (47) и тот факт, что $0 \notin \mathfrak{M}$) последную оценку можно переписать в следующем виде:

$$\int_{\mathfrak{M}} (f(x) - f^*(x))(f^*(x) - Q(f^*(x)))$$

$$\cdot\left(\frac{G(f^*(x)) - G(Q(f^*(x)))}{f^*(x) - Q(f^*(x))} - \frac{G(f(x)) - G(f^*(x))}{f(x) - f^*(x)}\right) dx \leq 0.$$

Последнее неравенство невозможно, ибо для всех $x \in \mathfrak{M}$ имеют место оценки (см. рис. 2)

$$\eta \geq f(x) > f^*(x) > Q(f^*(x)) > 0$$

и

$$\frac{G(f^*(x)) - G(Q(f^*(x)))}{f^*(x) - Q(f^*(x))} > \frac{G(f(x)) - G(f^*(x))}{f(x) - f^*(x)}.$$

Из полученного противоречия заключаем, что $f(x) \equiv f^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Теорема доказана.

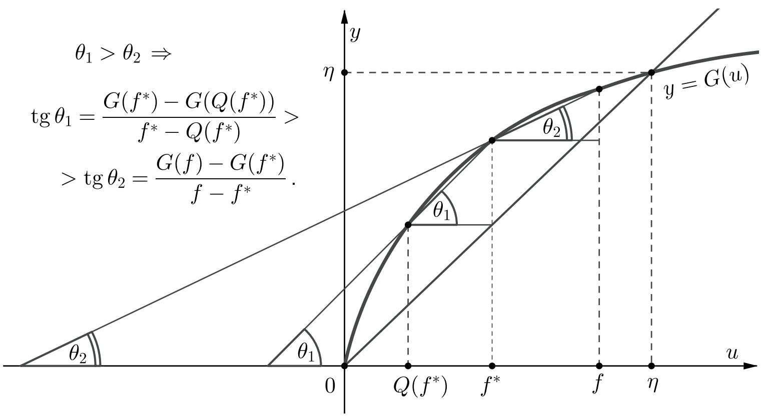

Рис. 2. Пересечения графика функции $y = G(u)$ с прямыми проходящими через точки $(f^*, G(f^*)), (Q(f^*), G(Q(f^*)))$ и $(f, G(f)), (f^*, G(f^*))$

□

Замечание 3. Небезынтересно отметить, что для случая $\lambda(x) \equiv 1$ теорема 4 было доказана в работе [16].

Совершая аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 4, можно доказать следующую теорему:

Теорема 5. *В условиях теоремы 3 уравнение* (3) *в классе неотрицательных нетривиальных и ограниченных на* $\mathbb{R}$ *функций не может иметь более одного решения.*

В конце работы для иллюстрации важности полученных результатов приведем несколько примеров функций λ, K и G.

Примеры функций $\lambda(x)$.

a_1) $\lambda(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$

a_2) $\lambda(x) = 1 - \varepsilon e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in [0, 1)$ — числовой параметр

Примеры ядра $K(x)$.

$b_1)$ $K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$

$b_2)$ $K(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \dfrac{1}{1+x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Примеры нелинейности G.

$c_1)$ $G(u) = u^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in (0,1)$ — числовой параметр,

$c_2)$ $G(u) = \dfrac{u^\alpha + u^\beta}{2}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \alpha, \beta \in (0,1)$— параметры,

$c_3)$ $G(u) = \gamma(1 - e^{-u^\alpha}), \quad u \in \mathbb{R}^+, \alpha \in (0,1), \gamma > 1$ — параметры.

Подробно остановимся на примере c_3). Во-первых, заметим, что $G(0) = 0$,

$$G'(u) = \gamma\alpha u^{\alpha-1} e^{-u^\alpha} > 0, \quad u > 0,$$

$$G''(u) = \gamma\alpha((\alpha-1)u^{\alpha-2} e^{-u^\alpha} - \alpha u^{2\alpha-2} e^{-u^\alpha}) < 0, \quad u > 0.$$

Следовательно, функция $G(u)$ — монотонно возрастающая и вогнутая на $\mathbb{R}^+$. Очевидно, что, например, для $\gamma := \frac{\eta}{1-e^{-\eta^\alpha}}$ имеет место $G(\eta) = \eta$. Проверим наконец условие D). Для каждого фиксированного $\sigma \in [0,1]$ рассмотрим функции на $\mathbb{R}^+$:

$$\chi_\sigma(u) := 1 - e^{-(\sigma u)^\alpha} + \sigma^\alpha e^{-u^\alpha} - \sigma^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Очевидно, что $\chi_\sigma(0) = 0$, $\chi_\sigma \in C(\mathbb{R}^+)$,

$$\chi'_\sigma(u) = \sigma^\alpha \alpha u^{\alpha-1} e^{-(\sigma u)^\alpha} - \sigma^\alpha \alpha u^{\alpha-1} e^{-u^\alpha} = \sigma^\alpha \alpha u^{\alpha-1}(e^{-(\sigma u)^\alpha} - e^{-u^\alpha}) > 0, \quad u > 0,$$

ибо $e^{u^\alpha(1-\sigma^\alpha)} \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in [0,1]$. Следовательно,

$$\gamma(1 - e^{-(\sigma u)^\alpha}) \geq \gamma(1 - e^{-u^\alpha})\sigma^\alpha, \quad \sigma \in [0,1], \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

В качестве $\varphi(\sigma)$ выбрав функцию σ^α приходим к условию D).

Приведем также конкретный пример нелинейного интегрального уравнения возникающее в динамической теории p-адических струн. Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\Phi^p(x) = \frac{1 - \varepsilon e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2}(1 - \varepsilon e^{-t^2})\Phi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{58}$$

относительно искомой нечетной ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $\Phi(x)$, где $p > 2$–нечетное число, а $\varepsilon \in [0,1)$ числовой параметр. Уравнением (58) описывается взаимодействия p-адических струн, где функция $\Phi(x)$ тахионное поле для замкнутых струн (см. [7] и [2] для $\varepsilon = 0$). Прямой проверкой можно убедиться, что если $f(x)$ является неотрицательным нетривиальным ограниченным и непрерывным на $\mathbb{R}^+$ решением нелинейного интегрального уравнения

$$f(x) = \frac{1-\varepsilon e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2})(1-\varepsilon e^{-t^2}) f^\alpha(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R}^+,$$
$$\alpha = \frac{1}{p} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{59}$$

то

$$\Phi(x) := \begin{cases} f^\alpha(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ -f^\alpha(-x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

будет нечетным нетривиальным ограниченным и непрерывным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (58).

Теперь убедимся, что для уравнения (59) функции $\lambda(x) = 1 - \varepsilon e^{-x^2}$, $\varepsilon \in [0,1)$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ и $G(u) = u^\alpha$, $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, \frac{1}{2})$ удовлетворяют всем условиям сформулированных теорем. Условия $1), 2)$ для функции $\lambda(x) = 1 - \varepsilon e^{-x^2}$ автоматически выполнятся, ибо $\varepsilon \in [0,1)$. Ядро $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$ является четной непрерывно дифференцируемой и суммируемой на $\mathbb{R}$ функцией, причем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} K(x) = 0$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Очевидно также, что $K(x)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$. Таким образом условия $a) - c)$ выполняются. Осталось проверить условия $A) - D)$ для нелинейности $G(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Очевидно, что $G \in C(\mathbb{R}^+)$, $G(0) = 0$, $G(1) = 1$, $(\eta = 1)$, $G'(u) = \alpha u^{\alpha-1} > 0$ и $G''(u) = \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2} < 0$, $u > 0$. Следовательно условия $A) - C)$ выполнены. Теперь, в качестве $\varphi(\sigma)$ выбирая $\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha$, сразу приходим к выполнению условия $D)$ для нелинейности $G(u) = u^\alpha$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. *Arefeva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I.V* . Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 212, N 3. P. 283–291.

2. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // *ТМФ.* 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

3. *Владимиров В. С.* Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80.

4. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // *ТМФ.* 2006. Т. 146. № 3. С. 402–409.

5. *Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications.* Appl. Math. Sci. Springer, New-York, 1988.

6. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // *ТМФ.* 2016. Т. 189. № 2 С. 239–255.

7. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p-адических открыто-замкнутых струн // *ТМФ.* 2019. Т. 200. № 1. С. 106–117.

8. *Atkinson C., Reuter G. E. H.* Deterministic epidemic waves // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1976. V. 80. P. 315–330.

9. *Diekmann O., Kaper H. G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Analysis. Theory Math. Appl.* 1978. V. 2. N 6 P. 721–737.

10. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biol.* 1978. V. 6. P. 109–130.

11. *Арефьева И. Я., Волович И. В.* О нелокальных космологических уравнениях на полуоси // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2011. № 1. С. 16–27.

12. *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Cosmological daemon // *JHEP.* 2011. V. 2011. N. 8. P. 1–32.

13. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2018. Т. 82. № 2 С. 172–193.

14. *Хачатрян Х. А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84. № 4 С. 198–207.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

15. *Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О качественных свойствах решения одной нелинейной граничной задачи в динамической теории p-адических струн // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.* 2020. Т. 16. № 4 С. 423–436.

16. *Петросян А. С., Хачатрян Х. А.* О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // *Матем. заметки.* 2023. Т. 113. № 4. С. 529–543.

17. *Геворкян Г. Г., Енгибарян Н. Б.* Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления // *Изв. НАН Армении, матем.* 1997. Т. 32. № 1 С. 5–20.

18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука.

19. *Rudin W. Real and Complex Analysis. Third Edition.* McGraw-Hill. Inc., 1987.

References

1. *Arefeva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I.V* . Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 212, N 3. P. 283–291.

2. *Vladimirov V. S., Volovich Ya. I.* Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory // *Theoret. and Math. Phys.* 2004. V. 138. N 3. P. 297–309.

3. *Vladimirov V. S.* The equation of the p-adic open string for the scalar tachyon field // *Izv. Math.* 2005. V. 69. N 3 P. 487–512.

4. *Zhukovskaya L. V.* Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory // *Theoret. and Math. Phys.* 2006. V. 146. N 3. P. 335–342.

5. *Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications.* Appl. Math. Sci. Springer, New-York, 1988.

6. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave // *Theoret. and Math. Phys.* 2016. V. 189. N 2 P. 1609–1623.

7. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave // *Theoret. and Math. Phys.* 2016. V. 189. N 2 P. 1609–1623.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

8. *Atkinson C., Reuter G. E. H.* Deterministic epidemic waves // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1976. V. 80. P. 315–330.

9. *Diekmann O., Kaper H. G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Analysis. Theory Math. Appl.* 1978. V. 2. N 6 P. 721–737.

10. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biol.* 1978. V. 6. P. 109–130.

11. *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* On nonlocal cosmological equations on half-line // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2011. N 1. P. 16–27.(Russian)

12. *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Cosmological daemon // *JHEP.* 2011. V. 2011. N. 8. P. 1–32.

13. *Khachatryan Kh. A.* On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory // *Izv. Math.* 2018. V. 82. N 2 P. 407–427.

14. *Khachatryan Kh. A.* Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity // *Izv. Math.* 2020. V. 84, N 4. P. 198–207.

15. *Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* On qualitative properties of the solution of a nonlinear boundary value problem in the dynamic theory of p-adic strings // *Vestn. St. Petersburg Univ., Ser. 10, Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.* 2020. V. 16. P. 423–436.(in Russian)

16. *Petrosyan H. S., Khachatryan Kh. A.* Uniqueness of the Solution of a Class of Integral Equations with Sum-Difference. Kernel and with Convex Nonlinearity on the Positive Half-Line // *Math. Notes.* 2023. V. 113. N 4. P. 529–543.

17. *Gevorkyan G. G., Engibaryan N. B.* New theorems for the renewal integral equation // *J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci.* 1997. T. 32. № 1 C. 2–16.

18. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Introductory real analysis.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970.

19. *Rudin W. Real and Complex Analysis. Third Edition.* McGraw-Hill. Inc., 1987.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 111-138
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 111-138

Информация об авторе

Хачатур Агавардович Хачатрян, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 6783-9479 AuthorID: 589262

Scopus Author ID 24461615400

Айкануш Самвеловна Петросян, кандидат физико-математических наук, доцент

Scopus Author ID 57201727643

Author Information

Khachatur A. Khachatryan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

SPIN 6783-9479 AuthorID: 589262

Scopus Author ID 24461615400

Haykanush S. Petrosyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Scopus Author ID 57201727643

Статья поступила в редакцию 12.04.2024;
одобрена после рецензирования 17.10.24; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 12.04.2024;
approved after reviewing 17.10.24; accepted for publication 30.10.2024