Научная статья
УДК 517+515.126.4
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-42-56

ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ПАРАМЕТРОВ BOX-КВАЗИМЕТРИК КАНОНИЧЕСКИХ ГРУПП ГЕЙЗЕНБЕРГА И ИХ ОБОБЩЕНИЙ

Александр Валерьевич Грешнов[1]
Софья Александровна Грешнова[2]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии Наук,
Новосибирск, Россия

[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

[1]greshnov@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000-0002-1218-2767
[2]s.greshnova@g.nsu.ru

Аннотация

Для групп Гейзенберга и некоторых их обобщений получены геометрические описания областей допустимых параметров q_1, q_2 для их Box-квазиметрик, рассматриваемых как симметрические (q_1, q_2)-квазиметрики.

Ключевые слова и фразы

(q_1, q_2)-квазиметрика, Box-квазиметрика, каноническая группа Карно, допустимые параметры.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН проект FWNF-2022- 0006.

Для цитирования

Грешнов А. В., Грешнова С. А. Области допустимых параметров Box-квазиметрик канонических групп Гейзенберга и их обобщений //*Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 42-56. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-42-56

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 42-56
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 42-56

THE DOMAINS OF ADMISSIBLE PARAMETERS OF BOX-QUASIMETRICS OF CANONICAL HEISENBERG GROUPS AND THEIR GENERALIZATIONS

Alexandr V. Greshnov[1], **Sofya A. Greshnova**[2],

[1]Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

[2]Novosibirsk State Unoversity, Novosibirsk, Russia

[1]greshnov@math.nsc.ru
[2]s.greshnova@g.nsu.ru

Abstract

For Heisenberg groups and some of their generalizations, geometric descriptions of the domains of admissible parameters q_1, q_2 for their Box-quasimetrics considered as symmetric (q_1, q_2) quasimetrics are obtained.

Keywords

(q_1, q_2)-quasimetric, Box-quasimetric, canonical Carnot group, admissible parameters.

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project FWNF-2022-0006.

For citation

Greshnov A. V., Greshnova S. A., The domains of admissible parameters of Box-quasimetrics of canonical Heisenberg groups and their generalizations //*Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 42-56. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-42-56

§ 1. Введение и постановка задачи

(q_1, q_2)-квазиметрическим пространством [1, 2] называется пара (X, d_X), где X — некоторое множество, содержащее не менее двух элементов, $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества

$$d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(в этом случае говорят, что d_X — *функция расстояния*) и (q_1, q_2)-*обобщенному неравенству треугольника*, т. е.

$$d_X(x,y) \le q_1 d_X(x,z) + q_2 d_X(z,y) \quad \forall x,y,z \in X, \quad q_1, q_2 > 0.$$

Несложно убедиться, что на самом деле $q_1, q_2 \ge 1$. Если $q_1 = q_2 = 1$, тогда (X, d_X) — квазиметрическое пространство [3]. Если для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d_X) выполняется условие *обобщенной симметрии*

$$d_X(x,y) \le q_0 d_X(y,x) \quad \forall x,y \in X,$$

где константа $q_0 > 0$ не зависит от выбора x, y (не сложно убедиться в том, что в этом случае $q_0 \ge 1$), то (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d_X) является q_0-симметрическим; в случае $q_0 = 1$ используется понятие симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства. Метрическое пространство — это симметрическое $(1,1)$-квазиметрическое пространство.

В дальнейшем мы будем рассматривать евклидову плоскость со стандартной координатной системой, для которой вместо привычных обозначений для координат (x, y) будем использовать (q_1, q_2); саму такую координатную плоскость будем обозначать как Π_{q_1,q_2}.

Для данной функции расстояния d_X рассмотрим совокупность всех пар (q'_1, q'_2) таких, что для d_X выполняется (q'_1, q'_2)-обобщенное неравенство треугольника. Каждая такая пара имеет свое «изображение» на плоскости Π_{q_1,q_2} в виде точки M' с координатами (q'_1, q'_2). Для данной функции расстояния d_X множество $Q = Q(X, d_X) \subset \Pi_{q_1,q_2}$ всех таких точек M' мы назовем *областью допустимых параметров* для (q_1, q_2)-квазиметрики d_X. Вообще говоря, для произвольной функции расстояния множество $Q(X, d_X)$ может оказаться и пустым. Таким образом, d_X является некоторой (q_1, q_2)-квазиметрикой тогда и только тогда, когда $Q(X, d_X) \ne \emptyset$. Говоря о том, что функция расстояния d_X является (q_1, q_2)-квазиметрикой, мы подразумеваем, что $Q(X, d_X) \ne \emptyset$, а (q_1, q_2) — некоторая точка из множества $Q(X, d_X)$.

Свойство 1. *Рассмотрим некоторую (q_1, q_2)-квазиметрику d_X. Тогда*

1) если $(q_1, q_2) \in Q(X, d_X)$, то для любых q'_1, q'_2 таких, что $q'_1 \ge q_1$, $q'_2 \ge q_2$, выполняется $(q'_1, q'_2) \in Q(X, d_X)$,

2) множество $Q(X, d_X)$ выпукло и замкнуто.

Доказательство. 1) Для любых $x, y, z \in X$ мы имеем

$$d_X(x,y) \le q_1 d_X(x,z) + q_2 d_X(z,y) \le q'_1 d_X(x,z) + q'_2 d_X(z,y).$$

2) Пусть $(q_1^i, q_2^i) \in Q(X, d_X)$, $i = 1, 2$, тогда

$$d_X(x,y) \le q_1^i d_X(x,z) + q_2^i d_X(z,y) \quad \forall x,y,z \in X,$$

откуда

$$\begin{aligned} &t d_X(x,y) + (1-t) d_X(x,y) \le \\ &\quad \le t\big(q_1^1 d_X(x,z) + q_2^1 d_X(z,y)\big) + (1-t)\big(q_1^2 d_X(x,z) + q_2^2 d_X(z,y)\big) \\ &\quad = (tq_1^1 + (1-t)q_1^2) d_X(x,z) + (tq_2^1 + (1-t)q_2^2) d_X(x,z) \quad \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Поэтому множество $Q(X,d_X)$ выпукло.

Рассмотрим точку $M_0 = (q_1^0, q_2^0)$, предельную к множеству $Q(X,d_X)$, т. е. найдется последовательность точек $\{M_n = (q_1^n, q_2^n)\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$,

$$d_X(x,y) \le q_1^n d_X(x,z) + q_2^n d_X(z,y) \quad \forall x,y,z \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что $M_0 \notin Q(X,d_X)$, тогда найдутся точки $x', y', z' \in X$ такие, что

$$d_X(x',y') > q_1^0 d_X(x',z') + q_2^0 d_X(z',y'). \tag{1.1}$$

Рассмотрим неравенство (1.1). Несложно понять, что найдется число

$$\varepsilon = \varepsilon\big(d_X(x',y'), d_X(x',z'), d_X(z',y')\big)$$

такое, что для любых $(\tilde q_1, \tilde q_2)$ таких, что $\sqrt{(\tilde q_1 - q_1^0)^2 + (\tilde q_2 - q_2^0)^2} < \varepsilon$, выполняется

$$d_X(x',y') > \tilde q_1 d_X(x',z') + \tilde q_2 d_X(z',y').$$

В таком случае найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется

$$\sqrt{(q_1^0 - q_1^n)^2 + (q_2^0 - q_2^n)^2} < \varepsilon,$$

что приводит нас к противоречию. □

Введем обозначение

$$\mathbf{K} = \{(q_1,q_2) \in \Pi_{q_1,q_2} \mid q_1 \ge 1,\ q_2 \ge 1\}.$$

Из определения (q_1,q_2)-квазиметрики вытекает, что $Q(X,d_X) \subseteq \mathbf{K}$; в частности, если (X,d_X) — метрическое пространство, то $(X,d_X) = \mathbf{K}$.

Из определения множества $Q(X,d_X)$ вытекает, что для любой точки $(q_1,q_2) \in \operatorname{int} Q(X,d_X)$ выполняется $d_X(x,z) < q_1 d_X(x,y) + q_2 d_X(y,z)$ $\forall x,y,z \in X$; при этом, если $(q_1,q_2) \in \partial Q(X,d_X)$, то найдутся точки $x,y,z \in Q(X,d_X)$ такие, что $d_X(x,z) = q_1 d_X(x,y) + q_2 d_X(y,z)$, см. [1]. В качестве примера рассмотрим некоторое метрическое пространство $(X, \hat{d})$; для произвольных точек вида $(1, q_2), (q_1, 1) \in \partial\mathbf{K}$ мы имеем

$$\hat{d}(x,y) = \hat{d}(x,y) + q_2\hat{d}(y,y) = q_1\hat{d}(x,x) + \hat{d}(x,y).$$

Проводя через граничные точки замкнутого выпуклого множества Q опорные прямые, получаем, что у Q существуют крайние точки. Легко видеть, что каждая крайняя точка множества Q является оптимальной по Парето точкой множества Q (в смысле минимизации их компонент), но не наоборот [1]. (Напомним, что точка $x_0 \in A$ называется *крайней точкой* множества A, если не существует таких точек $x_1, x_2 \in A$, что $x_0 \in (x_1, x_2)$, то есть $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$ для некоторого $0 < t < 1$.) Точка $(q_1^0, q_2^0) \in Q(X, d_X)$ называется *наилучшей*, если для всех $(q_1', q_2') \in Q(X, d_X)$ выполняется $q_i' \geq q_i^0$, $i = 1, 2$. Из определения наилучшей точки сразу же вытекает следующее

Свойство 2 ([1, 2]). *Если наилучшая точка существует, то она единственна; если таковая существует, то*

$$Q(X, d_X) = \{(q_1, q_2) \in \Pi_{q_1,q_2} \mid q_1 \geq a, \quad q_2 \geq b\}$$

для некоторых $a, b \geq 1$.

Примеры (q_1, q_2)-квазиметрических пространств с наилучшими точками (q_1^0, q_2^0) такими, что $q_1^0 + q_2^0 > 2$, см. в [1, 5]. Отметим, что не у каждой (q_1, q_2)-квазиметрики есть наилучшая точка; например у (q_1, q_2)-квазиметрики $\rho_{[0,1]}(x, y) = |x - y|^a$, $x, y \in [0, 1]$, $a > 1$, наилучшей точки нет [5].

Группы Карно $\mathbb{G}$, снабженные Box-квазиметриками $\mathrm{Box}_{\mathbb{G}}$, и более общие эквирегулярные пространства Карно—Каратеодори являются важными частными случаями симметрических $(1, q_2)$-квазиметрических пространств [4]–[8]; более того, $q_2 \neq 1$ в общем случае [8]. Box-квазиметрики были введены Найджелом, Стейном и Вэйнгером в работе [9] для получения оценок ядер некоторых неэллиптических дифференциальных операторов (типа сублапласиана), индуцированных векторными полями, удовлетворяющими условию Хермандера. Box-квазиметрики и их свойства играют огромную роль в геометрическом анализе на пространствах Карно—Каратеодори и группах Карно. Так, в своей фундаментальной работе [7] С. К. Водопьянов и М. Б. Карманова, рассматривая пространство Карно—Каратеодори именно как симметрическое (q, q)-квазиметрическое пространство, снабженное Box-квазиметрикой, получили новое и простое доказательство теоремы Громова о нильпотентизации векторных полей класса $C^{1,\alpha}$, удовлетворяющих условию Хермандера, при помощи которого авторы доказали все базовые свойства локальной геометрии пространств

Карно—Каратеодори (локальная аппроксимационная теорема Громова, теорема Ball-Box, теорема Рашевского—Чоу). При помощи полученных результатов С. К. Водопьянов и М. Б. Карманова доказали hc-дифференцируемость отображений пространств Карно—Каратеодори с непрерывными горизонтальными производными, получили формулы коплощади для гладких контактных отображений и формулы площади для липшицевых отображений пространств Карно—Каратеодори, см. [7].

Проблема нахождения минимальных значений q_2 для Box-квазиметрик, рассматриваемых как $(1, q_2)$-квазиметрики, является актуальной задачей, см. [8, 10, 11]. В связи с этим естественным образом возникает вопрос об описании множеств $Q(\mathbb{G}, \mathrm{Box}_{\mathbb{G}})$. Для некоторых (q_1, q_2)-квазиметрик множества их допустимых параметров были найдены в работах [1, 5], но для Box-квазиметрик множества $Q(\mathbb{G}, \mathrm{Box}_{\mathbb{G}})$ ранее не изучались. В 2015 г. на конференции по геометрическому анализу «Метрические структуры и управляемые системы» (17-21 декабря 2015 г., ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия) А. А. Аграчевым был задан вопрос о том, как выглядят области допустимых параметров для Box-квазиметрик групп Гейзенберга. В настоящей работе мы получили ответ на этот вопрос. Более того, в работе получено описание области допустимых параметров для Box-квазиметрик групп $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ (см. [8, 14]), имеющих более общую структуру, чем группы Гейзенберга.

Структура работы следующая. В § 2 мы приводим все необходимые определения, связанные с группами $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ и их Box-квазиметриками. В § 3 мы получили описание области допустимых параметров для Box-квазиметрики первой канонической группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ (теорема 4). В § 4, используя методы § 3, мы получили описание области допустимых параметров для Box-квазиметрик канонических групп $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ (теорема 7).

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и ценные замечания.

§ 2. Канонические группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. Определения и вспомогательные результаты

Далее мы будем использовать понятие канонической группы Ли.

Канонической конечномерной группой Ли [12] называется аналитическая группа Ли G, экспоненциальное отображение которой является тождественным. Таким образом, G отождествляется с некоторым евклидовым пространством $\mathbb{R}^N$ с системой координат $(x_1, \dots, x_N)$, индуцированной координатным репером $(O, e_1, \dots, e_N)$. Поэтому мы можем отождествлять любой элемент $u \in G$ с его координатной записью; в частности, нейтральный элемент группы G — точка $O = (0, \dots, 0)$ (начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), и для любого $u = (x_1, \dots, x_N)$ мы имеем $u^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$. Групповая операция «$\cdot$» на G (по-другому, левый сдвиг $P_u^G u' = u \cdot u'$ элемента $u' \in G$ на элемент $u \in G$) определяется при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа [13] и соответствующей таблицы коммутаторов, заданной на базисных ортах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^N$.

Каноническая группа $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ определяется, см. [8, 14], в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с системой координат

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$$

при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$[e_i, e_{i+n}] = \alpha_i e_{2n+1}, \quad \alpha_i > 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ являются 2-ступенчатыми группами Карно с горизонтальным распределением топологической коразмерности 1, см. [15]. Используя таблицу (2.1), запишем операцию левого сдвига для $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. Пусть $w = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$, $w' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, t')$, тогда

$$\begin{aligned} &P_w^{\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}} w' = w \cdot w' \\ &= \Big(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n, y_1 + y'_1, \dots, y_n + y'_n, t + t' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2}(x_i y'_i - x'_i y_i)\Big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Определим Box-квазиметрику $\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}$ на группе $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, тогда $v = u \cdot (u^{-1} v) = uc$, где $c = (c_1, \dots, c_{2n+1}) \in \mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(u, v) = \max\{|c_1|, \dots, |c_{2n}|, |c_{2n+1}|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Однопараметрическая подгруппа растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \to \mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, $\varepsilon \geq 0$, действует на элементы $u = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ по правилу

$$\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_n, \varepsilon y_1, \dots, \varepsilon y_n, \varepsilon^2 t).$$

Следующие свойства, называемые *инвариантностью Box-квазиметрики относительно действий растяжений и левых сдвигов*, являются прямым следствием фактов общей теории групп Карно, см. [15], но их несложно проверить непосредственно:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(u, v), \\ &\qquad \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(P_w^{\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}} u, P_w^{\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}} v) = \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}. \end{aligned}$$

Важные частные случаи групп $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ — первая группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ $(n=1)$ и n-группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ $(\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\alpha)$.

Box-квазиметрика группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ является симметрической $(1,q_2)$-квазиметрикой [8].

Теорема 3 (см. [8])**.** *Пусть* $\alpha_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$. *Минимальное значение константы* q_2 *в* $(1,q_2)$*-обобщенном неравенстве треугольника для группы* $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ *определяется как*

$$q_2=\begin{cases}1, & \alpha_0\le 2,\\ \frac{\alpha_0}{2}, & \alpha_0>2.\end{cases}$$

Для того, чтобы получить информацию о множестве $Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n})$, нам достаточно выяснить, что из себя представляет его граница

$$\partial Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}).$$

В нашем случае граница множества $Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n})$ состоит из таких пар $(q_1,q_2)\in\Pi_{q_1,q_2}$, что найдутся точки $u,v,w\in\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ такие, что

$$\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(u,w)=q_1\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(u,v)+q_2\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(v,w). \tag{2.3}$$

Но в силу того, что Box-квазиметрика инвариантна относительно левых сдвигов и действия группы растяжений, нам достаточно рассматривать в (2.3) только такие точки u,v,w, что $u=O$, $\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(O,v)=1$, $w=v\cdot\delta_\varepsilon w'$, где $\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(O,w')=1$, O — нейтральный элемент группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$.

§ 3. Множество $Q(\mathbb{H}^1_\alpha,\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$

Каноническая первая группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, см. [8], определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x,y,t), индуцированной координатным репером $(O_{\mathbb{H}^n_\alpha},e_1,e_2,e_3)$, при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=\alpha e_3, & \alpha>0,\\ [e_1,e_3]=[e_2,e_3]=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

Произвольный элемент $u\in\mathbb{H}^1_\alpha$ отождествляется со своей координатной записью, т. е.

$$u=xe_1+ye_2+te_3=(x,y,t).$$

Используя формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа [13] и таблицу (3.1), мы получаем аналитическое выражение операции левого сдвига $P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha}w'$ произвольного элемента $w'=(x',y',t')\in\mathbb{H}^1_\alpha$ на произвольный элемент $w=(x,y,t)\in\mathbb{H}^1_\alpha$:

$$P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w' = w \cdot w' = \Big(x + x, y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\Big). \tag{3.2}$$

Нейтральный элемент O канонической первой группы Гейзенберга совпадает с началом координат евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, т. е. $O = (0, 0, 0)$, и для любого элемента $u = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$ мы имеем $u^{-1} = (-x, -y, -t)$.

Пусть $u, v \in \mathbb{H}_\alpha^1$, тогда $v = u \cdot (u^{-1}v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда Box-квазирасстояние на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$ определяется как

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Для того, чтобы описать множество $Q(\mathbb{H}_\alpha^1, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1})$, нам достаточно определить его границу.

Теорема 4. *Множество $\partial Q(\mathbb{H}_\alpha^1, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1})$ представляет собой:*

1) $\partial\mathbf{K}$ *в случае* $\alpha \le 2$

2) *объединение дуги ветви гиперболы* $4q_1^2 + 4q_2^2 - 4q_1q_2\alpha + \alpha^2 - 4 = 0$, *ограниченной точками* $M_{q_1} = (1, \frac{\alpha}{2})$, $M_{q_2} = (\frac{\alpha}{2}, 1)$, *и лучей, принадлежащих* $\partial\mathbf{K}$, *начинающихся в точках* M_{q_1}, M_{q_2} *при* $\alpha > 2$.

Доказательство. Пусть точки $v = (x, y, t)$, $w' = (x', y', t') \in \mathbb{H}_\alpha^1$ таковы, что

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, v) = \mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, w') = 1.$$

Используя определение $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$, мы получаем, что

$$\max\{|x|, |y|, |t|, |x'|, |y'|, |t'|\} = 1. \tag{3.3}$$

Мы имеем

$$w = v \cdot \delta_\varepsilon w' = (x, y, t) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t') = (x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(xy' - x'y)). \tag{3.4}$$

В нашей ситуации тождество (2.3) имеет вид

$$\max\left\{|x + \varepsilon x'|, |y + \varepsilon y'|, \left|t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(xy' - x'y)\right|\right\} = q_1 + \varepsilon q_2. \tag{3.5}$$

Наша задача — найти такие $(q_1, q_2) \in \mathbf{K}$, что тождество (3.5) имеет место для каких-либо подходящих троек v, w', ε, для остальных троек мы имеем в (3.5) строгое неравенство.

1) В случае $\alpha \le 2$, учитывая (3.3), мы имеем

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, w) \le 1 + \varepsilon,$$

и поэтому в этом случае $Q(\mathbb{H}_\alpha^1, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}) = \mathbf{K}$.

2) Рассмотрим случай $\alpha > 2$. Тогда

$$\max_w \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O, w) = (1 + \alpha\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}},$$

например, при $v = (1, 1, 1)$, $w' = (-1, 1, 1)$. Мы имеем, см. (2.3),

$$1+\alpha\varepsilon+\varepsilon^2 = (q_1+\varepsilon q_2)^2 \Leftrightarrow (q_1^2-1)+(2q_1q_2-\alpha)\varepsilon+(q_2^2-1)\varepsilon^2 = f(\varepsilon) = 0. \quad (3.6)$$

Пусть $q_1, q_2 > 1$. Последнее уравнение рассмотрим как квадратный трехчлен относительно переменной ε. Его дискриминант равен

$$4q_1^2 + 4q_2^2 - 4q_1q_2\alpha + \alpha^2 - 4 = D(q_1, q_2).$$

Если $D(q_1, q_2) = 0$, то уравнение (3.6) имеет единственный вещественный корень ε_{q_1,q_2} кратности 2, и таким образом,

$$(q_1 + \varepsilon q_2)^2 - (1 + \alpha\varepsilon + \varepsilon^2) \geq 0, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Если пара $(q_1, q_2) \in \mathbf{K}$ такова, что $D(q_1, q_2) < 0$, то в этом случае квадратное уравнение (3.6) не имеет решений, то есть в этом случае мы имеем

$$(q_1 + \varepsilon q_2)^2 - (1 + \alpha\varepsilon + \varepsilon^2) > 0, \quad \varepsilon > 0;$$

поэтому такие пары (q_1, q_2) не принадлежат множеству $\partial Q(\mathbb{H}^1_\alpha, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$.

Пусть $(q_1, q_2) \in \mathbf{K}$ такова, что $D(q_1, q_2) > 0$. В этом случае у квадратного уравнения (3.6) есть два корня; несложно показать, что в ситуации, когда $q_1, q_2 > 1$, ни один из этих корней не может быть равен 0. То есть, они или оба положительны, или оба отрицательны. Отрицательные корни нас не интересуют. Рассмотрим положительный корень, обозначим его ε_0. Но тогда мы получим, что в некоторой окрестности ε_0 функция $f(\varepsilon)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Но это соответствут тому, что такие точки (q_1, q_2) не принадлежат множеству $Q(\mathbb{H}^1_\alpha, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$.

Стандартными методами аналитической геометрии проверяется, что в плоскости Π_{q_1,q_2} уравнение $D(q_1, q_2) = 0$ представляет собой гиперболу γ с центром симметрии в начале координат и осью симметрии, содержащей в себе биссектрису правого верхнего угла плоскости Π_{q_1,q_2}. Направляющие векторы (a, b) асимптот гиперболы γ определяются стандартным образом и удовлетворяют тождеству $\frac{a}{b} = \frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$.

Обозначим через γ^+ ветвь гиперболы γ, принадлежащую правому верхнему координатному углу плоскости Π_{q_1,q_2}. Вершина O' ветви γ^+ имеет координаты

$$\Big(\frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}, \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}\Big).$$

Точка M_{q_2} пересечения γ^+ и прямой $q_2 = 1$ имеет координаты $(\frac{\alpha}{2}, 1)$; более того, ветвь γ^+ касается прямой $q_2 = 1$ в точке M_{q_2}. Из очевидной симметрии следует, что ветвь γ^+ касается прямой $q_1 = 1$ в точке $M_{q_1} = (1, \frac{\alpha}{2})$.

Точки пересечения асимптот гиперболы γ и множества $\partial\mathbf{K}$ имеют координаты

$$\Big(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}, 1\Big), \quad \Big(1, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\Big).$$

Таким образом, множество $\partial Q(\mathbb{H}^1_\alpha, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$ представляет собой объединение дуги ветви γ^+, ограниченной точками M_{q_1}, M_{q_2}, и лучей, принадлежащих $\partial\mathbf{K}$, начинающихся в точках M_{q_1}, M_{q_2}. $\square$

Обратим внимание на тот факт, что точка M_{q_1} фигурирует в теореме 3 для случая, когда $n = 1$.

Следствие 5. *Box-квазиметрика* $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ *удовлетворяет* $\big(\frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}, \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}\big)$*-обобщенному неравенству треугольника и не удовлетворяет* (q, q)*-обобщенному неравенству треугольника, если* $q < \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}$.

Следствие 6. *Box-квазиметрика* $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ *не обладает наилучшей точкой.*

§ 4. Множество $Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}, \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n})$

Следуя доказательству теоремы 4, мы можем получить ее аналог для множества допустимых параметров $Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}, \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n})$. Для этого нам необходимо вместо (3.4) рассмотреть тождество

$$\begin{aligned} &w = v \cdot \delta_\varepsilon w' \\ &= \Big(x_1 + \varepsilon x'_1, \dots, x_n + \varepsilon x'_n, y_1 + \varepsilon y'_1, \dots, y_n + \varepsilon y'_n, t + t' + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i y'_i - x'_i y_i)\Big), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $v = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$, $w = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, t')$. Мы имеем, ср. с (3.3), используя определение $\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}$, что

$$\max\{|x_1|, |y_1|, \dots, |x_n|, |y_n|, |x'_1|, |y'_1|, \dots, |x'_n|, |y'_n|, |t|, |t'|\} = 1. \tag{4.2}$$

Пусть $\alpha_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, см. теорему 3. Тогда, в случае $\alpha_0 \le 2$, учитывая (4.2), мы имеем

$$\mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}(O, w) \le 1 + \varepsilon,$$

и поэтому в этом случае $Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n}) = \mathbf{K}$. Далее рассмотрим случай $\alpha_0 > 2$. Тогда

$$\max_{w} \mathrm{Box}_{\mathbb{H}_{\vec{\alpha},n}}(O, w) = (1 + \alpha_0\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}},$$

см. также [8]. После, повторяя все рассуждения доказательства теоремы 4, мы получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Множество* $\partial Q(\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \mathrm{Box}_{\vec{\alpha},n})$ *представляет собой:*

1) $\partial\mathbf{K}$ *в случае* $\alpha_0 \leq 2$,

2) *объединение дуги ветви гиперболы* $4q_1^2 + 4q_2^2 - 4q_1q_2\alpha_0 + \alpha_0^2 - 4 = 0$, *ограниченной точками* $M_{q_1} = (1, \frac{\alpha_0}{2})$, $M_{q_2} = (\frac{\alpha_0}{2}, 1)$, *и лучей, принадлежащих* $\partial\mathbf{K}$, *начинающихся в точках* M_{q_1}, M_{q_2}, *при* $\alpha_0 > 2$.

Список литературы

1. *Арутюнов А. В. , Грешнов А. В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2018. Т. 82, № 2. С. 3–32.

2. *Арутюнов А. В. , Грешнов А. В.* Арутюнов А. В., Грешнов А. В. Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения //*Докл. РАН.* 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.

3. *Wilson W. A.* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

4. *Arutyunov A. V. and Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

5. *Грешнов А. В.* (q_1, q_2)-Квазиметрики, билипшицево эквивалентные 1-квазиметрикам // *Матем. тр.* 2017. Т. 27, № 4. С. 253–262.

6. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providene, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

7. *Karmanova M. and Vodop'yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (*Trends Math.*) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

8. *Грешнов А. В., Трямкин М. В.* Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$-квазиметрик на канонических группах Карно // *Матем. заметки.* 2015. Т. 98, № 4. С. 635–639.

9. *Nagel A., Stein E. M. and Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

10. *Greshnov A. and Potapov V.* About coincidence points theorems on 2-step Carnot groups with 1-dimensional centre equipped with Box-quasimetrics // *AIMS Mathematics.* 2023. V. 8, N 3. P. 6191–6205.

11. *Greshnov A. V.* On finding the exact values of the constant in a $(1, q_2)$-generalized triangle inequality for Box-quasimetrics on 2-step Carnot groups with 1-dimensional center // Сиб. электрон. матем. изв.. 2021. Т. 18, № 2. P. 1251–1260.

12. *Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

13. *Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V: Группы и алгебры Ли.* М.: Наука, 1982.

14. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry.* Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.

15. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.

References

1. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // *Izvestiya: Mathematics.* 2018. V. 82, N 2. P. 245–272.

2. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points // *Dokl. Math.* 2016. V. 94. P. 434-437.

3. *Wilson W. A.* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

4. *A. V. and Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

5. *Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics // *Siberian Adv. Math.* 2017. V. 27. P. 253–262.

6. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providene, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

7. *Karmanova M. and Vodop'yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (*Trends Math.*) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

8. *Greshnov A. V., Tryamkin M. V.* Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups // Math. Notes. 2015. V. 98, N 4. P. 694–698.

9. *Nagel A., Stein E. M. and Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

10. *Greshnov A. and Potapov V.* About coincidence points theorems on 2-step Carnot groups with 1-dimensional centre equipped with Box-quasimetrics // *AIMS Mathematics.* 2023. V. 8, N 3. P. 6191–6205.

11. *Greshnov A. V.* On finding the exact values of the constant in a $(1, q_2)$-generalized triangle inequality for Box-quasimetrics on 2-step Carnot groups with 1-dimensional center // Sib. El. Math. Reports. . 2021. V. 18, N 2. P. 1251–1260.

12. *Ovsyannikov L. V. Group Analysis of Differential Equations.* New York: Academic, 1982.

13. *Postnikov M. M. Lectures in Geometry. Semester V: Lie Groups and Lie Algebras.* Moscow: Mir, 1982.

14. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry.* Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.

15. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.

Информация об авторе

Александр Валерьевич Грешнов, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988
Scopus Author ID 6506409279

Софья Александровна Грешнова, студентка

Author Information

Alexandr V. Greshnov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988
Scopus Author ID 6506409279

Sofya A. Greshnova, Student

Статья поступила в редакцию 28.10.2024;
одобрена после рецензирования 01.12.2024; принята к публикации 05.12.2024

The article was submitted 28.10.2024;
approved after reviewing 01.12.2024; accepted for publication 05.12.2024