Научная статья
УДК 517.44
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-5-19

ЗАДАЧА О НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ЧЁТНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дмитрий Сергеевич Аниконов, Дина Сергеевна Коновалова

Институт математики Сибирского отделения Российской Академии
им. С. Л. Соболева,
Новосибирск, Россия

anik@math.nsc.ru,dsk@math.nsc.ru

Аннотация

Исследуется задача интегральной геометрии, в которой функции, зависящие от $2n$ переменных, интегрируются по гиперплоскостям в n-мерном евклидовом пространстве. Такое интегрирование названо здесь обобщенным преобразованием Радона, которое совпадает с классическим, если подынтегральная функция зависит только от n переменных интегрирования. В широком смысле проблема интегральной геометрии состоит в получении информации о подынтегральной функции по значениям некоторого набора интегралов. Здесь ставится задача об определении поверхностей разрывов подынтегральной функции. Доказана единственность решения, получена формула и предложен соответствующий алгоритм. Результаты этой работы могут быть использованы в теории и практике зондирования.

Ключевые слова и фразы

обобщенное преобразование Радона, интегральная геометрия, зондирование, томография, дифференциальное уравнение, разрывные функции.

Источник финансирования

Работа выполнена по программе госзадания ИМ СО РАН FWNF-2022-0009)

Для цитирования

Аниконов Д. С., Коновалова Д. С. Задача о неизвестной границе для обобщенного преобразования Радона в чётномерном пространстве // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 5-19. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-5-19

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

THE PROBLEM OF AN UNKNOWN BOUNDARY FOR GENERALIZED RADON TRANSFORMS IN EVEN-DIMENSIONAL SPACE

Dmitry S. Anikonov, Dina S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation,

anik@math.nsc.ru,dsk@math.nsc.ru

Abstract

We study the problem of integral geometry, in the case when functions depending on $2n$ variables are integrated over hyperplanes in n-dimensional Euclidean space. Such an integration is called here the generalized Radon transform, which coincides with the classical one if the integrand depends on only on n integration variables. In a broad sense, the problem of integral geometry consists in obtaining information about the integrand by values some set of integrals. Here the task is to determination of discontinuity surfaces of the integrand. The uniqueness of the solution is proved, the formula is obtained and the corresponding algorithm is proposed. The results of this work may be used in the theory and practice of probing..

Keywords

generalized Radon transform, integral geometry, probing, tomography, differential equation, discontinuous functions.

Funding

The work was carried out within the framework of the state task of SB RAS (project FWNF-2022-0009)

For citation

Anikonov D. S., Konovalova D. S. The problem of an unknown boundary for generalized Radon transforms in even-dimensional space // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, no. 3, pp. 5-19. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-5-19

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

§ 1. Введение, основные обозначения и определения

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $E_n,\ n \geq 2$, в котором выделен ортонормальный базис $e_1, ..., e_n$. По умолчанию для координатного представления векторов из E_n будет использоваться именно этот базис. Применение других координат будет специально оговариваться.

Введем следующие обозначения: $B(x, \delta) = \{y : y \in E_n, |y - x| < \delta,\ x \in E_n\}$; ∂T – граница множества T; Ω – единичная сфера в E_n; const – некоторое число, не равное нулю; Δ_x– оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, ..., x_n)$; $C^k(T)$– пространство функций, заданных на множестве T и имеющих все непрерывные и ограниченные производные до k- го порядка включительно; $\mu_N(T)$ – N-мерная лебегова мера множества T; $\mu_\Omega(Q)$– мера Лебега множества $Q \subset \Omega$ по мере, определенной на сфере Ω, ω - точка сферы Ω, $\rho(x, T)$– расстояние от точки x до множества T, $O(1)$ - ограниченная функция.

Отметим,что для преобразования Радона случаи четных и нечетных размерностей различаются довольно значительно. При этом в случае четной размерности соответствующие выкладки приобретают более громоздкий вид. В этой работе в первых двух разделах n произвольно, но итоговый результат в третьем параграфе мы доказываем для четного $n = 2m,\ m = 1, 2, ...$.

Пусть G – ограниченное выпуклое открытое множество в E_n, содержащее попарно не пересекающиеся открытые множества $G_i,\ i = 1, ..., l$. Обозначая объединение этих множеств через G_0, потребуем чтобы $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Каждую границу ∂G_i считаем $(n-1)$- мерной непрерывной, замкнутой поверхностью. Ясно что поверхность ∂G_0 совпадает с объединением поверхностей $\partial G_i,\ i = 1, ..., l$. Гиперплоскости в E_n обозначаем $Y(x, \omega) = \{y : y \in E_n,\ (y - x) \cdot \omega = 0\}$. Для этих же гиперплоскостей мы будем использовать также и другое, более распространенное обозначение $L(\omega, p) = \{y : y \in E_n,\ y \cdot \omega = p\}$. Не трудно видеть, что $L(\omega, x \cdot \omega) = Y(x, \omega)$.

Примем еще одно дополнительное ограничение для множества G_0. Будем говорить, что G_0 – псевдовыпуклое множество, если существует множество Ω', $\Omega' \subset \Omega$, со следующими свойствами.

1. Мера множества $\Omega \setminus \Omega'$ равна нулю, т.е. $\mu_\Omega(\Omega \setminus \Omega') = 0$.

2. Для всех $\omega \in \Omega'$ и для $-\infty < p < +\infty$ пересечение $L(\omega, p) \bigcap \partial G_0$ является множеством, нулевой меры по мере пространства E_{n-1}, т.е. $\mu_{n-1}(L(\omega, p) \bigcap \partial G_0) = 0$.

Для пояснения данного определения приведем два простых, но характерных примера.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

Пример 1. Пусть $n = 2$, $G = B(0, 2\delta)$, $G_1 = \{y : y \in E_2, -\delta < y_i < \delta, i = 1, 2\}$, $G_2 = G \backslash \overline{G_1}$. Тогда из сферы Ω достаточно убрать вектора, коллинеарные координатным осям, чтобы получить Ω' и псевдовыпуклое множество $G_0 = G_1 \bigcup G_2$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, G_1, G_2- два шара в E_3 на положительном расстоянии друг от друга, G -шар, содержащий G_1 и G_2, $G_3 = G \backslash (\overline{G_1} \bigcup \overline{G_2})$. Тогда $G_0 = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$. оказывается псевдовыпуклым, причем $\Omega' = \Omega$.

Вообще, введенное определение охватывает многие случаи ограничений, адекватных теории зондирования.

Точку $z \in \partial G_0$ назовем контактной, если она принадлежит общему участку границы ровно двух множеств G_i и G_j, $1 \leq i, j \leq l$, причем этот общий участок вблизи точки z является гладкой поверхностью класса C^2. Будем считать, что множество контактных точек плотно в $\partial G_0 \setminus \partial G$.

Рассмотрим класс M функций $g(x, y)$, таких, что их частные производные первого порядка по x_i непрерывны и ограничены для $(x, y) \in G \times G_i$ и кроме того выполнены соотношения $|g(x, y) - g(x, \tilde{y}| \leq const|y - \tilde{y}|^\alpha$, $const > 0$, $x \in G$, $y, \tilde{y} \in G_i$, $0 < \alpha \leq 1$, $i = 1, ..., l$; $g(x, y) = 0$, $y \notin G$.

Ясно, что для таких $g(x, y)$ и для каждого i, $1 \leq i \leq l$, существуют предельные конечные граничные значения $[g(x, z)]_i$, $z \in \partial G_i$, т.е. $g(x, y) \to [g(x, z)]_i$ при $y \to z$, $y \in G_i$. В контактных точках $z \in \partial G_0$ определим скачки функции равенствами $[g(x, z)]_{j,i} = [g(x, z)]_j - [g(x, z)]_i$, $1 \leq i, j \leq l$, $z \in \partial G_i \cap \partial G_j$.

Рассмотрим также класс K функций $\lambda(y)$, $y \in E_n$ таких, что $|\lambda(y) - \lambda(\tilde{y})| \leq const|y - \tilde{y}|^\alpha$, $const > 0$, $i = 1, ..., l$; $y, \tilde{y} \in G_i$, $0 < \alpha \leq 1$, $i = 1, ..., l$; $\lambda(y) = 0$, $y \notin G$.

Определим обобщенное преобразование Радона формулой

$$[Vg](x, \omega) = \int_{(y-x)\cdot\omega=0} g(x, y) d_y\sigma, \ x \in G, \ \omega \in \Omega, \ g \in M. \tag{1}$$

Здесь интегрирование производится по гиперплоскостям $Y(x, \omega) = \{y : y \in E_n, \ (y - x) \cdot \omega = 0\}$. Ясно, что ограничения для функции $g(x, y)$ достаточны для существования интеграла в правой части формулы (1).

Классическое преобразование Радона запишем в виде

$$[R\lambda](\omega, p) = \int_{y\cdot\omega=p} \lambda(y) d_y\sigma, \ \omega \in \Omega, \ -\infty < p < \infty, \ \lambda \in K$$

Легко видеть, что если $g(x, y) = \lambda(y)$, то $[V\lambda](x, \omega) = [R\lambda](\omega, x \cdot \omega)$.

§ 2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Используя предыдущие обозначения и определения, рассмотрим следующую задачу о неизвестной границе.

Задача. Зная множество G и функцию $[Vg](x, \omega)$, $x \in G, \omega \in \Omega,\ g \in M$, найти поверхность ∂G_0.

Несмотря на то, что объектом поиска считается вся поверхность ∂G_0, фактически, определению подлежит только множество $\partial G_0 \setminus \partial G$, поскольку поверхность ∂G известна из постановки задачи. Отметим, что имеющееся соотношение размерности неизвестной подынтегральной функции и заданной информации не позволяют надеяться на определение всего подынтегрального выражения. В то же время знание поверхностей разрыва плотности представляет собой полезную информацию. Например, в задачах зондирования такие сведения весьма существенны. В частности, для рентгеновской томографии эта информация является основной. Отметим, что тематика поиска неизвестных границ довольно обширна и относится к разным областям математики. Вероятно, такой первой постановкой является известная задача Стефана.

Настоящая работа является продолжением предыдущих исследований авторов в области интегральной геометрии [1], [2], [3], [4]. Не претендуя на полный обзор темы, укажем на работы классиков этого направления, таких как Д. Радон [5], Р. Курант [6], Ф. Йон [7], И. М. Гельфанд [8]. Кроме того, значительный вклад в решение подобных задач внесли труды математической школы М. М. Лаврентьева и В.Г. Романова в связи с исследованием обратных задач математической физики [9]. В настоящее время исследования в этом направлении продолжаются, хотя и с меньшей интенсивностью. К примерам такого развития можно отнести, в частности, публикации [10]–[17]. Упомянутые здесь исследования велись по многим направлениям. В частности, использовались различные многообразия для интегрирования, варьировались классы подынтегральных функций, ставились разные задачи и использовались разнообразные методы исследований, требующих соответствующих ограничений. Несмотря на имеющееся множество достигнутых результатов, настоящая статья не имеет близких аналогов среди работ других авторов. Вероятно, из перечисленных самой близкой нам публикацией является наша предыдущая работа [1], где была исследована аналогичная задача, но в нечетномерном пространстве.

Некоторое различие в используемых предположениях не позволяет нам сослаться здесь на результаты работы [1], где были доказаны утверждения, аналогичные следующим двум леммам.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

Лемма 1. *Если $\lambda(y)$ принадлежит классу K и множество G_0 является псевдовыпуклым, то для любого вектора $\omega \in \Omega'$ преобразование Радона $[R\lambda](\omega, p)$ непрерывно по p.*

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор $\omega \in \Omega'$ и любое значение p. Если $L(\omega, p) \bigcap \overline{G} = \varnothing$, то это означает, что замкнутое множество $L(\omega, p)$ отделено от замкнутого множества $\overline{G}$. Поскольку $\lambda(y) = 0$ для $y \notin G$, то $R(\omega, p') = 0$ для всех $p' \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ при некотором $\epsilon > 0$ и, следовательно, $R(\omega, p)$ непрерывна при таком значении числа p.

Пусть теперь $L(\omega, p) \bigcap \overline{G} \neq \varnothing$. Используем декартову систему координат, в которой орты координатных осей есть $e_1', ..., e_n'$, где $e_n' = \omega$. В этой системе координат преобразование Радона принимает простой вид

$$[R\lambda](e_n', p) = \int \lambda(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p) d\xi_1 ... d\xi_{n-1},$$

где интегрирование производится по пространству E_{n-1}. Отметим, что подынтегральная функция может иметь разрывы только в точках поверхности ∂G_0. Рассмотрим сечение $L(e_n', p) \cap \overline{G}$. В силу обобщенной выпуклости множества G_0 почти все точки $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p)$ из этого сечения принадлежат открытому множеству $E_n \backslash \partial G_0$. Следовательно, для каждой такой точки существует шар $B(\xi, \delta) \subset G_0$, в котором функция $\lambda(y)$ непрерывна . Пусть $\{p_k\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к p. Ясно, что начиная с некоторого номера k, все точки $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p_k) \in B(\xi, \delta)$. Поэтому $\lambda(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p_k) \to \lambda(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p)$ при $k \to \infty$. В силу выбора точки $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p)$, такая сходимость имеется для почти всех $\xi_1, ..., \xi_{n-1}$, соответствующих сечению $L(e_n', p) \cap \overline{G}$.

Отсюда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, выводим

$$\lim_{k \to \infty} \int \lambda(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p_k) d\xi_1 ... d\xi_{n-1} = \int \lambda(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, p) d\xi_1 ... d\xi_{n-1},$$

что и означает непрерывность $[R\lambda](\omega, p)$.

Лемма доказана.

Лемма 2.*Для $\lambda(y) \in K$ верно тождество*

$$\int_\Omega [R\lambda](\omega, x \,.\, \omega) d\omega = \frac{\pi^{((n-1)0.5)}(n-1)}{\Gamma((n+1)0.5)} \int_G \frac{\lambda(y)}{|y-x|} dy. \qquad (2)$$

Доказательство. Следуя схеме рассуждений, использованной в [7] для гладких функций, рассмотрим выражение

$$W(x) = \int_G \int_\Omega \lambda(y) |(y-x) \cdot \omega| d\omega dy$$

и выразим его через преобразование Радона. Именно, меняя порядок интегрирования и используя теорему Фубини, получим

$$W(x) = \int_\Omega \int_G \lambda(y)|(y-x)\omega|)dy\,d\omega = \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |p| \int_{(y-x)\cdot\omega=p} \lambda(y)d_y\sigma\,dp\,d\omega$$

$$= \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |p|[R\lambda](\omega, p + x\centerdot\omega)\,dp\,d\omega.$$

Рассмотрим внутренний интеграл по p при любом фиксированном $\omega \in \Omega'$. Тогда, согласно лемме 1, $[R\lambda](\omega, p+x\centerdot\omega)$ является непрерывной функцией по переменной p. Это свойство, а также очевидное тождество $[R\lambda](\omega, p) = [R\lambda](-\omega, -p)$ позволяют выполнить следующие преобразования

$$\Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} |p|[R\lambda(\omega, p + x\centerdot\omega)]\,dp$$

$$= \Delta_x \left[\int_{x\centerdot\omega}^{\infty} (p - x\centerdot\omega)[R\lambda](\omega, p)\,dp - \int_{-\infty}^{x\centerdot\omega} (p - x\centerdot\omega)[R\lambda](\omega, p)\,dp\right] = 2[R\lambda](\omega, x\centerdot\omega).$$

Следовательно,

$$\Delta_x W(x) = 2\int_\Omega [R\lambda](\omega, x\centerdot\omega)d\omega. \tag{3}$$

Здесь и далее используется тот факт, что интегрирования по Ω и по Ω' эквивалентны. Величину $\Delta_x W(x)$ можно вычислить и другим способом. Для этого воспользуемся известными тождествами [7]

$$\int_\Omega |\xi\centerdot\omega|d\omega = \frac{\pi^{((n-1)0.5)}2}{\Gamma((n+1)0.5)}|\xi|,\ \xi \in E_n, \tag{4}$$

$$\Delta_x|y-x| = (n-1)|y-x|^{-1}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$W(x) = \frac{\pi^{((n-1)0.5)}2}{\Gamma((n+1)0.5)} \int_G \lambda(y)|y-x|dy,$$

$$\Delta_x W(x) = \frac{2(n-1)\pi^{((n-1)0.5)}}{\Gamma((n+1)0.5)} \int_G \frac{\lambda(y)}{|y-x|}dy. \tag{6}$$

Сравнивая (3) и (6), получаем (2). Лемма доказана.

Следствие 1. *Для $g(x,y) \in M$ справедливо равенство*

$$\int_\Omega [Vg](x,\omega)\,d\omega = \beta_1 \int_G \frac{g(x,y)}{|y-x|}dy,\ \beta_1 = \frac{\pi^{((n-1)0.5)}(n-1)}{\Gamma((n+1)0.5)}. \tag{7}$$

Доказательство. Отметим, что в равенстве (2) интегрирование производится по y и по ω, а переменная x при этом неизменна. Это позволяет здесь считать x параметром, что расширяет возможности применения формулы (2). А именно, при фиксированном значении x можно рассматривать $g(x,y)$ как некоторую функцию $\lambda(y)$ и считать, что $\lambda(y) \in K$ и $[Vg](x,\omega) = [R\lambda](\omega, x\cdot\omega)$. Тогда из равенства (2) следует равенство (7), что и доказывает следствие 1.

§ 3. Основные результаты

Напомним, что до сих пор n было произвольным натуральным числом, $n \geq 2$. Начиная с этого места и до конца работы число n считается четным, $n = 2m$, $m = 1, \ldots$.

Введем дополнительные ограничения на множество Q функций g. Именно, $g \in Q$, если $g \in M$ и функция $g(x,y)$ в $G \times G_j$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по x_i до порядка n включительно, а по переменным y_i до первого порядка, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, l$.

Теорема 1. *Для любой функции $g(x,y) \in Q$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta_x)^{m-1}\int_\Omega [Vg](x,\omega)d\omega = \beta \cdot g(x,x)\int_G \frac{\omega_i}{|y-x|^n}dy + \Phi_i(x), \;\; x \in G_0, \quad (8)$$

где $i = 1, \ldots, n$, $\beta \neq 0$, $\Phi_i(x)$ – непрерывная и ограниченная функция при $x \in G$, $\omega_i = (y_i - x_i)/|y-x|$, интеграл в правой части является сингулярным.

Доказательство. Как известно [6],

$$(\Delta_x)^{m-1}|y-x|^{-1} = \beta_2 \cdot |y-x|^{1-n}, \;\; \beta_2 \neq 0 \quad (9)$$

Применим оператор $(\Delta_x)^{m-1}$ к равенству (7). Подробная запись полученного результата весьма громоздка. Но для нашей цели мы можем использовать и более короткую форму. Именно, выделим интеграл с максимальной степенью особенности, который получается при дифференцировании только сомножителя $|y-x|^{-1}$. Сумму остальных слагаемых обозначим в виде одной функции. Используя тождество (9), запишем

$$(\Delta_x)^{m-1}\int_\Omega [Vg](x,\omega)d\omega = \beta_1\beta_2 \cdot \int_G \frac{g(x,y)dy}{|y-x|^{n-1}} + F_1(x), \quad (10)$$

где $F_1(x)$ представляет собой линейную комбинацию интегралов типа потенциала со слабой особенностью вида

$$\Psi(x) = \int_{G_i} \frac{\psi(x,y)}{|y-x|^\gamma}dy, \;\; 0 \leq \gamma \leq n-2, \;\; i = 1, \ldots, l.$$

Функция $\psi(x,y)$ в $G \times G_j$ при $x \neq y$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по x_i до второго порядка включительно, а по переменным y_i до первого порядка, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,l$.

Перепишем равенство (10) в виде $(\Delta_x)^{m-1} \int_\Omega [Vg](x,\omega)d\omega =$

$$= \beta_1\beta_2 \cdot \int_G \frac{g(x,x)dy}{|y-x|^{n-1}} + const \cdot \int_G \frac{(g(x,y)-g(x,x))dy}{|y-x|^{n-1}} + F_1(x), \qquad (11)$$

К равенству (11) применим оператор дифференцирования по переменной x_i. Используя известную формулу дифференцирования интегралов типа потенциала со слабой особенностью [18], получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta_x)^{m-1} \int_G \frac{g(x,y)}{|y-x|} = \beta_1\beta_2\beta_3 \cdot g(x,x)H_i(x) + const \cdot h_i(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}F_1(x) + F_{2,i}(x), \qquad (12)$$

где $\beta_3 \neq 0$, $H_i(x) =$

$$= \int_G \frac{\omega_i}{|y-x|^n}dy, h_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_G \frac{g(x,y)-g(x,x)}{|y-x|^{n-1}}dy, \;\; \omega_i = (y_i - x_i)/|y-x| \qquad (13)$$

В правой части равенства (13) интегралы $H_i(x)$ являются сингулярными. Сумма остальных слагаемых представляет собой непрерывную ограниченную функцию при $x \in G$, поскольку она состоит из интегралов типа потенциала со слабой особенностью типа $\Psi(x)$ при $0 \le \gamma \le n-1$, к которым применима теорема 1.1.1 [19].

Таким образом, обозначая в равенстве (12) $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 1.

Введем следующие обозначения:

$$P(x) = \Delta_x^{m-1} \int_\Omega [Vg](x,\omega)d\omega, \; U(x) = |\nabla P(x)|, \; x \in G_0, \qquad (14)$$

$N(z) = (N_1(z),...,N_n(z))$ - внутренняя единичная нормаль к ∂G_j в контактной точке $z \in \partial G_j \bigcap \partial G_k$, $1 \le j,k \le l$.

Следствие 2. *Функция $U(x)$ ограничена на любом непустом множестве $\{x : x \in G_0, \rho(x, \partial G_0) > \varepsilon > 0\}$, а для точек $x \in G_j$, $x = z + \tau N(z)$, $0 < \tau < \tau_0$, $U(x) \to +\infty$ при $x \to z$ $(\tau \to 0)$, если $[g(z,z)]_{j,k} \neq 0$.*

Доказательство. Составим выражение $H(x) = H_1(x)N_1(z) + ... + H_n(x)N_n(z)$. Обозначая $f(\omega) = N_1(z)\omega_1 + ... + N_n(z)\omega_n$, $\omega = (y-x)/|y-x|$, получаем равенство

$$H(x) = \int_G \frac{f(\omega)}{|y-x|^n}dy$$

В принятых обозначениях равенство (12) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i}P(x) = \beta g(x,x)H_i(x) + O(1),$$

откуда следует, что

$$\nabla P(x)\cdot N(z) = \beta g(x,x)H(x) + O(1)$$

Сингулярный интеграл $H(x)$ исследован в работе [4]. В частности, доказана ограниченность $H(x)$ на любом непустом множестве $\{x : x \in G_0, \rho(x,\partial G_0) > \varepsilon > 0\}$. Там же доказано представление

$$H(x) = [g(z,z)]_{j,k}\int_{\Omega^+(z)} N(z)\cdot\omega d\omega|\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1), \qquad (15)$$

где $\Omega^+(z) = \{\omega : \omega \in \Omega,\ \omega\cdot N(z) > 0\}$. Тогда имеем

$$\nabla P(x)\cdot N(z) = \beta g(x,x)[g(z,z)]_{j,k}\int_{\Omega^+(z)} \omega\cdot N(z)d\omega|\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1),$$

что доказывает утверждение следствия.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству утверждений локального и глобального типов о единственности поставленной задачи. В качестве функции $g(x,y)$, а также множества ∂G_0 возьмем два набора таких элементов $g_i(x,y)$, $\partial G_0^{(i)}$, $i = 1,2$. Им будут соответствовать два обобщенных преобразования Радона $[Vg_i](x,\omega)$, а также функции $U_i(x)$, определенные в (14).

Теорема 2. *Если для контактных точек $z^{(i)} \in \partial G_0^{(i)} \setminus \partial G$ и для $x \in G$ выполняется условие $[g_i(z^{(i)},z^{(i)})]_{j,k} \neq 0$, а также $[Vg_1](x,\omega) = [Vg_2](x,\omega)$, то $z^{(1)} \in \partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$, а $z^{(2)} \in \partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $U_1(x) = U_2(x)$, $x \in G_0^1 \bigcap G_0^2$. Возьмем произвольную контактную точку $z^{(1)}$ и предположим, что $z^{(1)} \notin \partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$. Тогда существует шар $B(z^{(1)},\varepsilon)$, не содержащий точек из $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$. Выбирая $\tau_0 < \varepsilon$, рассмотрим точки $x = z + \tau N(z)$, $0 < \tau < \tau_0$. Используя следствие 2, получаем, что $U_1(x) \to +\infty$ при $x \to z^{(1)}$. С другой стороны, $U_2(x)$ при всех $0 < \tau < \tau_0$ ограничена, поскольку $x \in G_0^{(2)}$, $\rho(x,\partial G_0^{(2)}) > \varepsilon$, что противоречит условию теоремы. По симметрии рассуждений, и любая контактная точка из $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$ принадлежит $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если в условиях теоремы 2 потребовать выполнения неравенств $[g_i(z^{(i)},z^{(i)})]_{j,k} \neq 0$, $i = 1,2$, для всех контактных точек поверхностей $\partial G_0^{(i)} \setminus \partial G$, то $\partial G_0^{(1)} = \partial G_0^{(2)}$.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что любая контактная точка $z \in \partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$ принадлежит также и $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$. Отсюда, в силу плотности контактных точек на множестве $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$, делаем вывод о принадлежности всех точек $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$ также и поверхности $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$. Рассуждая симметрично, получим, что все точки множества $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$ являются элементами множества $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$. Следовательно, $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G = \partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$, $\partial G_0^{(1)} = \partial G_0^{(2)}$. Следствие доказано.

§ 4. Заключение

Обратим внимание на тот факт, что формула (8) позволяет построить алгоритм решения задачи о неизвестной границе, исследованной в этой работе. Для этого достаточно выполнить интегрирование и дифференцирование заданной функции и предложить какой-либо способ указания точек аномально больших значений полученной и уже известной функции $U(x)$, определенной в равенстве (14).

Список литературы

1. *Anikonov D.S., Kazantsev S.G., Konovalova D.S.* "A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform *Journal of inverse and Ill-posed Problems,*. 2023. V. 31, N. 6, P. 959-965; https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038.

2. *Anikonov D. S., Balakina E. Yu., Konovalova D. S.,* An inverse problem for generalized Radon transformation, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics.* 15 (1) (2022); DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.

3. *D. S. Anikonov and D. S. Konovalova* A Problem of Integral Geometry for a Family of Curves with Incomplete Data // *Doklady Mathematics,* 2015. V. 92, N. 2. P. 221–224.

4. *D. S. Anikonov* The unknown boundary problem for singular integral equations //*Doklady Mathematics*, 2010, V. 81, N. 2, P. 241–243.

5. *Хелгасон С. Преобразование Радона.* М.: Мир, 1983.

6. *Курант Р. Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964.

7. *Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными.* М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.

8. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* М.: Физматгиз, 1962.

9. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и доп.* Новосибирск: Изд-во Института математики, 2010.

10. *Коганов А. В.,* Задача интегральной геометрии с мероиндукцией // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2011. Т. 3. № 1. С. 31–37.

11. *Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V.* Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // *Eurasian Soil Science.* 2021. V. 54, N. 9. P. 1400–1409.

12. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Ажгалиев Ш. У., Таугынбаева Г. Е.,* Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази- Монте-Карло //*Известия вузов. Математика.* 2020. № 3. С. 98–104.

13. *Баев А. В.* Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2018. Т. 58, № 4. С. 550–560.

14. *Симонов Е. Н., Прохоров А. В., Акинцева А. В.,* Математическое моделирование реконструкции объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии с применением голографических методов // *Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование.* 2019. Т. 12. № 3. С. 102–114.

15. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.,* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields //*Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D. E. (Eds.). Lecture Notes in Computer Science*, 2020. V. 11974. P. 97–111.

16. *Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L.,* X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features, *Soviet J. Nondest. Test.* 1985. V. 21, N. 2. P. 106–113.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

17. *Светов И. Е.* Метод приближенного обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в R3 // *Сибирские электронные математические известия.* 2020. Т. 17. С. 1073–1087.

18. *Михлин С.Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М.:Физматгиз, 1962.

19. *Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.* М.:Высшая школа, 1977.

References

1. *Anikonov D.S., Kazantsev S.G., Konovalova D.S.* "A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform *Journal of inverse and Ill-posed Problems*, 2023. V.31, N.6,2023. P. 959-965; https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038.

2. *Anikonov D. S., Balakina E. Yu., Konovalova D. S.* An inverse problem for generalized Radon transformation, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics.* 2022. V. 15, N. 1; DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.

3. *D. S. Anikonov and D. S. Konovalova* A Problem of Integral Geometry for a Family of Curves with Incomplete Data // *Doklady Mathematics*, 2015. V. 92, N. 2, P. 221–224.

4. *D. S. Anikonov* The unknown boundary problem for singular integral equations //*Doklady Mathematics*, 2010, V. 81, N. 2, P. 241–243.

5. *Helgason C.Radon transforms.* Moskow: Mir, 1983.

6. *R.Courant Partial differential equations.* Inc. New York, 1962.

7. *F. John Plane vawes and spherical means.* Inc. New York, 1955.

8. *Gelfand I.M., Graev M.I., Vilenkin N.Ya.Integral geometry and conecting questions for theory of represantations.* Moskow: Fizmatgiz, 1962.

9. *Lavrentjev M.M., Savejev L.Ya. Theory of operations and ill-posed problems.* Novosibirsk: Sobolev institute of mathematics, 2010.

10. *Koganov A.V.* Problem of integral geometry with the measure of induction// *Computer investigations and modeling.* 2011. V. 3., N. 1. C.31-37.

11. *Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V.* Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // *Eurasian Soil Science.* 2021. V. 54, N. 9. P. 1400–1409.

12. *Temirgaliev N., Abikenova Sh. K., Azhgaliev Sh.U., Tauganbaeva G.E.* Radon transform in a scheme K(B)P-investigations and Monte-Carlo theory. *Reports of institutes. Mathematics.* 2020. N. 3, P.98-104.

13. *Baev A.V.* Application of Radon transform for solution of inverse scattering problem in flat layered medium//*Journal of computation mathematics and mathematical phisics.* 2018. V. 58, N. 4, P. 550-560.

14. *Simonov E.N., Prokhorov A.V., Akintseva A.V.* Mathematical modeling of reconstruction for volume image in X-ray tomography with using holographic methods//*Messenger of South Ural University. Mathmatical modeling and programing.* 2019. V. 12, N. 3, P.102-114.

15. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields. Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D. E. (Eds.)// *Lecture Notes in Computer Science*, 2020. V. 11974. P. 97–111.

16. *Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L.* X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features//*Soviet J. Nondest. Test.* 1985. V. 21, N. 2. P. 106–113.

17. *Svetov I.E.* Method of approcsimated inversion for Radon transform defined on functions and for normal Radon tansform with respect to vector and symmetric tensor fields in R3. //*Siberian Electronic mathematical proceedings.* 2020. V. 17. P.1073-1087.

18. *Mikhlin S.G.Multidimensional Singular Integral and Equations.* Moscow:Fizmatgiz, 1962.

19. *Mikhlin S.G.Linear Partial Differntial Equations.* Moscow: Vysshaya shkola, 1977.

Информация об авторах

Дмитрий Сергеевич Аниконов, доктор физико-математических наук, профессор
Author ID: 7845

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 5-19
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 5-19

Scopus Author ID 6603025486
Дина Сергеевна Коновалова, кандидат физико-математических наук, доцент
Author ID: 15216
Scopus Author ID 6506979505

Author Information

Dmitry S. Anikonov, Doctor of Mathematics, Professor
Author ID: 7845
Scopus Author ID 6603025486
Dina S. Konovalova, Candidate of Mathematics, Associate Professor
AuthorID: 15216
Scopus Author ID 6506979505

Статья поступила в редакцию 15.05.2024;
одобрена после рецензирования 15.08.24; принята к публикации 26.09.2024

The article was submitted 15.05.2024;
approved after reviewing 15.08.24; accepted for publication 26.09.2024