Научная статья
УДК 517.9
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Владимир Сергеевич Белоносов[1],
Алексей Георгиевич Швец[2]

[1]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия
[1,2]Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия

[1]bvs@math.nsc.ru, [2]a.shvets1@g.nsu.ru

Аннотация

В настоящей работе классическая теория операторнозначных аналитических функций распространена на широкий класс линейных неограниченных операторов, определенных в банаховых пространствах на не всюду плотных множествах. Также установлены свойства дробных степеней соответствующих операторов. В рассматриваемый класс входят дифференциальные операторы Штурма–Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле, действующие в пространствах непрерывных функций на ограниченных промежутках.

Ключевые слова и фразы

Абстрактные уравнения Матьё–Хилла, приведение к стандартной форме, операторные экспоненты и дробные степени, параметрический резонанс.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Для цитирования

Белоносов В. С., Швец А. Г. Фундаментальные свойства дробных степеней неограниченных операторов в банаховых пространствах // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 20-29. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29

FUNDAMENTAL PROPERTIES OF FRACTIONAL POWERS OF UNBOUNDED OPERATORS IN BANACH SPACES

Vladimir S. Belonosov[1], **Alexey G. Shvets**[2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia
[1,2]Novosibirsk State University,
630090, Novosibirsk, Russia

[1]bvs@math.nsc.ru, [2]a.shvets1@g.nsu.ru

Abstract

In this paper, the classical theory of operator-valued analytic functions is extended to a wide class of linear unbounded operators, defined in Banach spaces on not everywhere dense sets. The properties of fractional powers of the corresponding operators are also established. The class under consideration includes Sturm–Liouville differential operators with homogeneous Dirichlet boundary conditions, acting in spaces of continuous functions on bounded intervals.

Keywords

Abstract Mathieu–Hill equations, reduction to standard form, operator exponentials and fractional powers, parametric resonance.

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (project No. FWNF-2022-0008).

For citation

Belonosov V. S., Shvets A. G. Fundamental properties of fractional powers of unbounded operators in Banach spaces // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 3, P. 20-29. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29

§ 1. Введение и постановка задачи

Тема настоящей работы непосредственно связана с развитием теории нелинейного параметрического резонанса для абстрактного уравнения Матьё–Хилла:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = \varepsilon F(\omega t, u). \tag{1}$$

Здесь $u(t)$ — искомая функция со значениями в банаховом пространстве E, зависящая от вещественного скалярного аргумента t; A — действующий в E линейный оператор, который может быть как ограниченным, так и неограниченным; ε — малый скалярный параметр; $F(\tau, u)$ — отображение со значениями в E, непрерывное по совокупности аргументов и почти периодическое по переменной τ; ω — частота возмущения $\varepsilon F(\omega t, u)$. В частности, A может быть эллиптическим дифференциальным оператором в пространстве непрерывно дифференцируемых функций или в пространстве L_p, где дифференцирование понимается в обобщенном смысле.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ нулевое решение уравнения (1) устойчиво по Ляпунову. Потеря устойчивости при сколь угодно малых $\varepsilon \neq 0$, когда частота ω близка к некоторым критическим значениям, называется параметрическим резонансом. Это явление имеет важное прикладное значение и много лет изучается мировым научным сообществом. В настоящее время разработана фундаментальная математическая теория для уравнений с линейными по u отображениями F. Подробная библиография приведена в монографиях [1], [2]. Но для нелинейных уравнений пока установлена только серия результатов при определенных упрощающих предположениях. Например, в работе [3] рассмотрено уравнение (1) в гильбертовом пространстве с самосопряженным положительным оператором A, имеющим вполне непрерывный обратный A^{-1}.

Основные результаты для нелинейных уравнений получаются с помощью асимптотического метода Крылова–Боголюбова и его распространениями на широкий класс уравнений в бесконечномерных пространствах (см. [4]–[6]). При этом уравнение (1) предварительно преобразуется к системе первого порядка в стандартной форме в смысле Боголюбова:

$$\frac{dw(t)}{dt} = \varepsilon f(t, \omega, w),$$

где $w(t)$ — вектор с компонентами $(w_1(t), w_2(t))$, связанными с $u(t)$ обобщенным преобразованием Ван-дер-Поля:

$$w_1(t) = \exp\left(-it\sqrt{A}\right)[\sqrt{A}u(t) - iu'(t)]/2,$$

$$w_2(t) = \exp\left(+it\sqrt{A}\right)[\sqrt{A}u(t) + iu'(t)]/2.$$

Однако распространение этих подходов на уравнения в банаховых пространствах с операторами A, определенными на не всюду плотных множествах, пока не реализовано. Одна из главных проблем состоит в том, что для таких операторов не разработана достаточно полная теория дробных степеней. Также не ясно, будут ли эти дробные степени порождать сильно непрерывные операторные экспоненты в преобразованиях Ван-дер-Поля.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 20-29
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 20-29

Например, в качестве A может быть рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$:

$$A : v(x) \to -\frac{d^2 v}{dx^2} + q(x)v(x), \quad q(x) \in C[a,b], \quad q(x) \geqslant 0. \tag{2}$$

Область определения этого оператора состоит из дважды гладких функций $v(x)$, равных нулю на концах промежутка $[a,b]$. Такие операторы часто называют «плохими» (см. раздел 16.2 книги [7]) и переходят к их распространению в гильбертово пространство L_2, применяя теорию обобщенных производных С.Л. Соболева. Поэтому необходимо корректно обосновать существование $\sqrt{A}$. В дальнейшем потребуется выяснить, будут ли операторы $\sqrt{A}$ порождать сильно непрерывные полугруппы $\exp(\pm it\sqrt{A})$. Фундаментальная теорема Т. Като [8] содержит необходимые и достаточные условия, гарантирующие сильную непрерывность этой полугруппы. Но проверка этих условий весьма затруднительна, так как они включают оценки всех натуральных степеней резольвенты оператора $i\sqrt{A}$.

В настоящей работе для класса операторов, которые являются аналогами «плохого» оператора Штурма–Лиувилля, найдены условия, гарантирующие существование дробных степеней, и установлены их некоторые принципиальные свойства. При этом систематически используются традиционные обозначения: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества вещественных и комплексных чисел, $\| \cdot \|_X$ — норма элементов банахова пространства X, $\| \cdot \|_{X \to Y}$ — норма ограниченных линейных отображений из X в Y, и т.д.

§ 2. Основные результаты

Фундаментальная теория дробных степеней подробно разработана для так называемых позитивных операторов в банаховых пространствах (см., например, монографии [7], [9]). Напомним, что замкнутый линейный оператор A в банаховом пространстве E с плотной областью определения $D(A)$ называется позитивным, если отрицательная вещественная полуось $\overline{\mathbb{R}}_- = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leqslant 0\}$ состоит из его регулярных точек, а для резольвенты $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ на множестве $\overline{\mathbb{R}}_-$ выполнена оценка

$$\| R_A(\lambda) \|_{E \to E} \leqslant M(1+ | \lambda |)^{-1}. \tag{3}$$

Соответствующие определения и свойства дробных степеней являются следствиями более общих утверждений о построении операторнозначных функций $f(A)$, где $f(\lambda)$ — аналитические функции в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль полуоси $\overline{\mathbb{R}}_-$, удовлетворяющие дополнительным условиям при $|\lambda| \to \infty$. Мы распространим эти результаты на более широкое множество аналитических функций $f(\lambda)$, используя свойства операторов A, являющихся абстрактными аналогами операторов Штурма–Лиувилля.

Пусть r и φ — положительные вещественые числа, причем $\varphi < \pi/2$. Символом $S(r,\varphi)$ обозначим совокупность комплексных чисел λ, удовлетворяющих неравенствам $|\lambda| \geqslant r$, $|\arg \lambda| \leqslant \varphi$. Будем говорить, что замкнутый линейный оператор A в банаховом пространстве E, область определения $D(A)$ которого не предполагается всюду плотной, принадлежит классу $K(r,\varphi)$, если множество $\Delta(r,\varphi) = \mathbb{C} \setminus S(r,\varphi)$ состоит из регулярных точек оператора A и для этих точек выполнено неравенство (3). Известно, что в пространстве $C[a,b]$ дифференциальные операторы (2) с нулевыми граничными условиями Дирихле на концах промежутка $[a,b]$ обладают указанными свойствами, поэтому элементы $K(r,\varphi)$ можно считать абстрактными аналогами операторов Штурма–Лиувилля.

Распространим теперь классическое понятие операторнозначных функций $f(A)$ на произвольные операторы $A : E \to E$, принадлежащие $K(r,\varphi)$. Допустим, что комплекснозначная функция $f(\lambda)$ определена и аналитична в открытом множестве Ω_f, содержащем $S(r_f,\varphi_f)$, где $r_f < r$, $\varphi_f > \varphi$. Выберем произвольные значения ρ и ψ так, чтобы $r_f \leqslant \rho < r$, $\varphi_f \geqslant \psi > \varphi$. Тогда граница Γ множества $S(\rho,\psi)$ будет расположена в области $\Delta(r,\varphi) \cap \Omega_f$, где обе функции $f(\lambda)$ и $R_A(\lambda)$ являются аналитическими. Ориентируем контур Γ так, чтобы при его обходе множество $S(\rho,\psi)$ оставалось слева, и составим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{4}$$

Дополнительно потребуем, чтобы $\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{\gamma} f(\lambda) = 0$ при каком-нибудь $\gamma > 0$, зависящем от функции f. Тогда, с учетом неравенства (3), данный интеграл окажется абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_{E\to E}$. Более того, в силу аналитичности подынтегрального выражения значение этого интеграла не зависит от выбора параметров ρ и ψ, определяющих контур Γ и расположенных в указанных выше промежутках. Поэтому при выполнении перечисленных условий интеграл (4) целесообразно назвать значением операторнозначной функции $f(A)$.

Одно из основных свойств операторнозначных функций состоит в том, что если для оператора A и функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ существуют $f(A)$ и $g(A)$, то при определенных ограничениях справедлива формула $f(A)g(A) = fg(A)$. Доказательство этого утверждения для позитивных операторов имеется в [9]. Покажем, что его можно распространить на операторы класса $K(r,\varphi)$.

Предположим, что $A \in K(r,\varphi)$, а функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ удовлетворяют приведенным выше условиям существования $f(A)$ и $g(A)$. На основании этих условий, найдутся такие параметры r_j и φ_j ($j = 1, 2$), что $0 < r_j < r$, $\frac{\pi}{2} > \varphi_j > \varphi$ и $\Omega_f \supset S(r_1, \varphi_1)$, $\Omega_g \supset S(r_2, \varphi_2)$. Кроме того, при некоторых положительных γ_j пределы произведений $\lambda^{\gamma_1} f(\lambda)$ и $\lambda^{\gamma_2} g(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ равны нулю.

Введем в рассмотрение еще несколько параметров: $\rho = \max r_j$, $\psi = \min \varphi_j$. Очевидно, что $\rho < r$ и $\psi > \varphi$. Значит, можно выбрать ρ' и ψ' так, чтобы $\rho < \rho' < r$, $\psi > \psi' > \varphi$. Из этих неравенств вытекает серия включений:

$$\Omega_f \cap \Omega_g \supset S(r_1, \varphi_1) \cap S(r_2, \varphi_2) \supset S(\rho, \psi) \supset S(\rho', \psi') \supset S(r, \varphi),$$

причем границы трех последних множеств попарно не пересекаются. Пусть Γ и Γ' — границы $S(\rho, \psi)$ и $S(\rho', \psi')$ соответственно. Тогда $\Gamma \subset \Delta(r, \varphi) \cap \Omega_f$, $\Gamma' \subset \Delta(r, \varphi) \cap \Omega_g$ и существуют

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda, \quad g(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} g(\mu) R_A(\mu)\, d\mu.$$

Теперь можно вычислить интересующее нас произведение:

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= -\frac{1}{2\pi i} f(A) \int_{\Gamma'} g(\mu) R_A(\mu)\, d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(A) g(\mu) R_A(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} \left(\int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda \right) g(\mu) R_A(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} \left(\int_{\Gamma} f(\lambda) g(\mu) R_A(\lambda) R_A(\mu)\, d\lambda \right) d\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} \left(\int_{\Gamma} f(\lambda) g(\mu) \frac{R_A(\lambda) - R_A(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\lambda \right) d\mu. \end{aligned}$$

Здесь дважды использовано соображение о том, что ограниченный линейный оператор можно внести под знак абсолютно сходящегося интеграла. Сначала $f(A)$ внесли под знак интеграла по Γ', а затем $g(\mu)R_A(\mu)$ — под интеграл по Γ. Последнее равенство является следствием классической формулы $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu)$. Получившийся интеграл разложим в сумму двух и в одном из них изменим порядок интегрирования:

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda) \left(\int_{\Gamma'} \frac{g(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu \right) d\lambda \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} g(\mu) R_A(\mu) \left(\int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda \right) d\mu. \quad (5)$$

Приведенные преобразования легко обосновать, используя абсолютную сходимость каждого интеграла в (5), которая гарантирована неравенствами $|\lambda-\mu| \geqslant c|\lambda|$ и $|\lambda-\mu| \geqslant c|\mu|$, где λ принадлежит прямолинейным участкам контура Γ, а μ — прямолинейным участкам контура Γ'. Для проверки этих неравенств заметим, что соответствующие участки расположены на полупрямых в комплексной плоскости, выходящих из начала координат. Рассмотрим две такие полупрямые P и P', являющиеся сторонами угла величины $\theta \in (0,\pi)$, и выберем на них две произвольные точки $\lambda \in P$ и $\mu \in P'$. Получится треугольник с вершинами 0, λ, μ, длины сторон которого равны $|\lambda|$, $|\mu|$ и $|\lambda-\mu|$. Если угол $\theta \geqslant \pi/2$, то находящаяся против него сторона имеет наибольшую длину, поэтому $|\lambda-\mu| > |\lambda|$ и $|\lambda-\mu| > |\mu|$. Если же $\theta < \pi/2$, то длина противолежащей стороны будет не меньше длин высот, выходящих из вершин λ и μ, длины которых соответственно равны $|\lambda|\sin\theta$ и $|\mu|\sin\theta$.

Вернемся к формуле (5) и воспользуемся тем обстоятельством, что контур Γ' лежит внутри области, ограниченной контуром Γ. Откуда, на основании интегральной формулы Коши, получаем:

$$\int_{\Gamma'} \frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\, d\mu = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\, d\lambda = (2\pi i) f(\mu).$$

Следовательно,

$$f(A)g(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\mu)g(\mu)R_A(\mu)\, d\mu = fg(A).$$

Еще одно важное свойство введенных в рассмотрение функций $f(A)$ для операторов $A \in K(r,\varphi)$ связано с тем, что мы отказались от требования плотности областей определения $D(A)$ в пространстве E. Предположим, что замыкание области определения оператора A является подпространством $E_0 \subset E$, которое может не совпадать со всем E, и выясним, где расположены значения $f(A)$. Так как интеграл (4) абсолютно сходится по норме $\|\cdot\|_{E\to E}$, то значение оператора $f(A)$ на любом элементе $x \in E$ выражается абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_E$ интегралом

$$f(A)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_A(\lambda)x\, d\lambda.$$

Значения функции $f(\lambda)R_A(\lambda)x$ на любых элементах $x \in E$ принадлежат $D(A)$, но тогда значения данного интеграла принадлежат замыканию $D(A)$, то есть подпространству E_0.

Наконец, рассмотрим дробные степени операторов класса $K(r,\varphi)$. Для простоты ограничимся степенями A^α, где $|\alpha| \leqslant 1$. Пусть $0 < \alpha < 1$, тогда

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 20-29
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 20-29

функция $f(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ является аналитической в комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси $\overline{\mathbb{R}}_-$ и удовлетворяет предъявленным выше условиям, гарантирующим существование $f(A)$. Поэтому на всем пространстве E определен ограниченный оператор

$$A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha} R_A(\lambda)\, d\lambda,$$

значения которого принадлежат подпространству E_0. Кроме того, для любых положительных α и β, сумма которых меньше 1, выполнено равенство $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$. Это равенство сохранится и при $\alpha + \beta = 1$, причем в данном случае справедлива классическая формула:

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1} R_A(\lambda)\, d\lambda = R_A(0) = A^{-1}.$$

Из приведенных утверждений вытекает еще одно свойство отрицательных дробных степеней. Символом F_α обозначим множество значений оператора $A^{-\alpha}$. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$, тогда $A^{-\beta} = A^{-\alpha}A^{-(\beta-\alpha)}$ и значение оператора $A^{-\beta}$ на любом элементе $x \in E$ совпадает со значением $A^{-\alpha}$ на элементе $A^{-(\beta-\alpha)}x$. Следовательно, $F_\beta \subset F_\alpha$. Аналогичное свойство справедливо в случае $\beta = 1$: $F_1 \subset F_\alpha$. Учитывая равенство $F_1 = D(A)$, получим включение $D(A) \subset F_\alpha \subset E_0$. Так как замыкание $D(A)$ совпадает с E_0, то замыкание F_α тоже совпадёт с E_0 при всех $\alpha \in (0, 1)$.

Теперь определим положительные дробные степени A^α при каждом $\alpha \in (0, 1]$. Так как оператор A^{-1} имеет обратный, то при всех отличных от нуля элементах $x \in E$ значения $A^{-1}x$ не равны нулю. На основании равенства $A^{-1}x = A^{-(1-\alpha)}A^{-\alpha}x$, значения $A^{-\alpha}x$ также не могут равняться нулю. Поэтому оператор $A^{-\alpha}$ имеет обратный, который целесообразно назвать положительной дробной степенью A^α.

Область определения оператора A^α совпадает с множеством значений $A^{-\alpha}$ и является всюду плотной в E_0. Кроме того, при α и β, сумма которых не превосходит 1, справедливо равенство $A^\alpha A^\beta = A^{(\alpha+\beta)}$. Доказательство этого утверждения для операторов A с областью определения, плотной в пространстве E, приведено в классических монографиях (например, в [7], [9]), и его легко распространить на изучаемый нами случай. Таким образом, справедлива:

Теорема. *Предположим, что в банаховом пространстве E определен оператор A, принадлежащий классу $K(r, \varphi)$, с областью определения $D(A)$, плотной в подпространстве $E_0 \subset E$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1]$ существует дробная степень A^α, область определения которой также содержится и является плотной в E_0.*

В частности, существует квадратный корень $\sqrt{A}$. В дальнейшем будем изучать принципиальный вопрос, при каких условиях этот корень порождает сильно непрерывную операторную экспоненту $\exp(\pm it\sqrt{A})$.

Список литературы

1. *Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах.* Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1972.

2. *Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах.* М.: Наука, 1987.

3. *Белоносов В. С.* Асимптотический анализ параметрической неустойчивости нелинейных гиперболических уравнений // *Математический сборник.* 2017. Т. 208, № 8. С. 4–30.

4. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.* Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

5. *Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.* Киев: «Наукова думка», 1971.

6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* 4-е изд. М.: Наука, 1974.

7. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* М.: Наука, 1966.

8. *Като Т. Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972.

9. *Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.

References

1. *Fomin V. N. Mathematical Theory of Parametric Resonance in Linear Distributed Systems.* Leningrad: Leningrad State University Press, 1972.

2. *Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. Parametric Resonance in Linear Systems.* Moscow: Nauka, 1987.

3. *Belonosov V. S.* Asymptotic analysis of the parametric instability of nonlinear hyperbolic equations // *Sbornik: Mathematics.* 2017. Vol. 208, No. 8. 1088–1112 pp.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 20-29
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 20-29

4. *Krylov N. M., Bogolyubov N. N. Introduction to Nonlinear Mechanics.* Kiev: Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937.

5. *Mitropol'skii Yu. A. The Averaging Method in Nonlinear Mechanics.* Kiev: Naukova Dumka, 1971.

6. *Bogolyubov N. N., Mitropol'skii Yu. A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations.* 4th edition. Moscow: Nauka, 1974.

7. *Krasnosel'skii M. A., Zabreiko P. P., Pustyl'nik E. I., Sobolevskii P. E. Integral Operators in Spaces of Summable Functions.* Moscow: Nauka, 1966.

8. *Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1966.

9. *Krein S. G. Linear Differential Equations in Banach Spaces.* Moscow: Nauka, 1967.

Информация об авторах

Владимир Сергеевич Белоносов, доктор физико-математических наук, профессор
SPIN 3799–4245, Author ID 2086
Scopus Author ID 56627775300
Алексей Георгиевич Швец, аспирант

Author Information

Vladimir S. Belonosov, Doctor of Mathematics, Professor
SPIN 3799–4245, Author ID 2086
Scopus Author ID 56627775300
Alexey G. Shvets, Graduate student

Статья поступила в редакцию 18.09.24;
одобрена после рецензирования 10.10.24; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 18.09.24;
approved after reviewing 10.10.24; accepted for publication 30.10.2024