Научная статья
УДК 517.98
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-99-110

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ РЕФЛЕКСИВНЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ СИЛЬНО ГРАНЕВО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Жумабек Хамидуллаевич Сейпуллаев[1]
Камалатдин Бахытбай улы Каленбаев[2]

[1]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
[2]Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
[1]jumabek81@mail.ru;https://orcid.org/0009-0004-9388-3945,
[2]kkb97@mail.ru

Аннотация

Одной из важных задач теории операторных алгебр является геометрическая характеризация пространств состояний операторных алгебр. В связи с этим в середине 80-х годов прошлого века появилась работа Я.Фридмана и Б.Руссо, в которой были введены гранево симметричные пространства, основной целью введения которых являлась геометрическая характеризация предсопряженных пространств JBW^*-троек, допускающих алгебраическую структуру. Многие из свойств, требуемых в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. В данной работе доказывается, что в рефлексивных атомических нейтральных сильно гранево симметричных пространствах X и Y преобразование $P: M_X \to M_Y$ сохраняющее ортогональность между геометрическими трипотентами и псевдо-вероятность перехода продолжается до изометрического изоморфизма из X^* в Y^*.

Ключевые слова и фразы

WFS-пространство, SFS-пространство, симметричная грань, геометрический трипотент, Пирсовский проектор.

Для цитирования

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 99-110

Сейпуллаев Ж.Х., Каленбаев К.Б. Изометрический изоморфизм рефлексивных нейтральных сильно гранево-симметричных пространств //*Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 99-110. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-99-110

ISOMETRIC ISOMORPHISM OF REFLEXIVE NEUTRAL STRONGLY FACIALLY SYMMETRIC SPACES

Jumabek Kh. Seypullaev[1], Kamalatdin B. Kalenbaev[2],

[1]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan

[2]V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[1]jumabek81@mail.ru
[2]kkb97@mail.ru

Abstract

The problem on geometric characterization of state spaces of operator algebras is important in the theory of such algebras. In the mid-80's, Friedman and Russo introduced facially symmetric spaces for geometric characterization of the predual spaces of JBW*-triples that admit an algebraic structure. Many properties that are required in such characterizations are natural assumptions on state spaces of physical systems. These spaces are regarded as a geometric model for states in quantum mechanics. In the present article, we prove that, for all reflexive atomic neutral strongly facially symmetric spaces X and Y, if a transform $P : M_X \to M_Y$ preserves both orthogonality between geometric triponents and the transition pseudo-probabilities then P can be extended to an isometric isomorphism from X^* to Y^*.

Keywords

WFS-space, SFS-space, symmetric face, geometric tripotent, Pierce projection.

For citation

Seypullaev J.Kh., Kalenbaev K.B., Isometric isomorphism of reflexive neutral strongly facially symmetric spaces //*Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 3, P. 99-110. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-99-110

§ 1. Введение и постановка задачи

Исследование гранево симметричных пространств, основной целью введения которых является геометрическая характеризация предсопряженных пространств JBW^*-троек, допускающих алгебраическую структуру, восходит к работам Я. Фридмана и Б. Руссо [1], [2]. Многие из свойств, требуемые в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. Естественно, что предсопряженное пространство для комплексных алгебр фон Неймана и более общих JBW^*-троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством [3]. В работе [4] были даны геометрические характеризации комплексных гильбертовых пространств и комплексных спин-факторов, а также дано описание JBW^*-троек ранга 1 и 2, факторов Картана типа 1 и 4. Позже Я.Фридман и Б.Руссо в работе [5] получили описание атомических гранево симметричных пространств, и было показано, что нейтральное, сильно гранево симметричное пространство изометрически изоморфно предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1-6. М.Нейл и Б.Руссо в [6] определили геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству комплексных JBW^*-троек. В работе [7] было показано, что предсопряженное пространство вещественного JBW-фактора является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда он абелев или спин-фактор. В работе [8] было доказано, что предсопряженное пространство JBW-алгебры является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда она есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2. В работе [9] дано описание конечномерных вещественных нейтральных сильно гранево симметричных пространств с свойством JP (совместное разложение Пирса), и было показано, что если пространство Z является действительным нейтральным сильно гранево симметричным пространством с унитарным трипотентом, то Z изометрически изоморфен пространству $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы.

В данной работе доказывается, что в рефлексивных атомических нейтральных сильно гранево симметричных пространствах X и Y преобразование $P : M_X \to M_Y$ сохраняющее ортогональность между геометри-

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 99-110

ческими трипотентами и псевдо-вероятность перехода продолжается до изометрического изоморфизма из X^* в Y^*.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы приведем необходимые сведения из теории гранево-симметричных пространств [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Пусть Z – вещественное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются *ортогональными,* обозначение $f \diamondsuit g$, если

$$\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| + \|g\|.$$

Подмножества $S, T \subset Z$ называются *ортогональными,* обозначение $S \diamondsuit T$, если $f \diamondsuit g$ для всех $(f,g) \in S \times T$.

Для подмножества S пространства Z положим $S^{\diamondsuit} = \{f \in Z : f \diamondsuit g, \forall g \in S\}$ и назовем $S^{\diamondsuit}$ *ортогональным дополнением* к S.

Выпуклое подмножество F единичного шара $Z_1 = \{f \in Z : \|f\| \leqslant 1\}$ называется *гранью,* если включение $\lambda g + (1-\lambda)h \in F$, где $g, h \in Z_1$, $\lambda \in (0,1)$, влечет $g, h \in F$.

Грань F из Z_1 называется *выставленной по норме,* если $F = F_u = \{f \in Z : u(f) = 1\}$ для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$.

Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей,* если $\|u\| = 1$ и $u(g) = 0$ при всех $g \in F_u^{\diamondsuit}$.

Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью,* если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{sp}F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^{\diamondsuit}$.

Пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-пространством), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 — симметрична.

Пусть A является C^*-алгеброй. Если v – частичная изометрия из A, то элементы $l = vv^*$ и $r = v^*v$ являются проекторами. Для каждой частичной изометрии v проекторы $E(v)$, $F(v)$ и $G(v)$ на банаховом пространстве A определяется следующим образом:

$$E(v)x = lxr, F(v)x = (1-l)x(1-r), G(v)x = lx(1-r) + (1-l)xr.$$

$E(v)$, $F(v)$ и $G(v)$ называются Пирсовскими проекторами соответствующими v.

Известно ([3], лемма 2.8), что если v – частичная изометрия из алгебры фон Неймана A, тогда оператор $S_v = E(v) - G(v) + F(v)$ – определенный с помощью Пирсовских проекторов $E(v)$, $F(v)$ и $G(v)$ является линейной изометрией из A_* на A_* такой, что $S_v^2 = I$, и с множеством неподвижных точек $E(v)A_* \oplus F(v)A_*$. Поэтому A_* является слабо гранево симметричным пространством (см. [3]).

WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным пространством* (SFS-пространством), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $x \in Z^*$ с $\|x\| = 1$ и $F_u \subset F_x$, мы имеем $S_u^* x = x$, где S_u – симметрия, соответствующая F_u.

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом,* если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u соответствующей к F_u. Через $\mathcal{GT}$ и $\mathcal{SF}$ обозначим множество всех геометрических трипотентов и симметричных граней соответственно, и соответствие $\mathcal{GT} \ni u \mapsto F_u \in \mathcal{SF}$ является биективным (см. [2], предложение 1.6). В [10] найдено необходимое и достаточное условие, когда элементы сопряженного пространства рефлексивного SFS-пространства являются геометрическими трипотентами.

Для каждой симметричной грани F_u определяются сжимающие проекторы $P_k(u)$, $k = 0, 1, 2$ на Z следующим образом: во-первых, $P_1(u) = (I - S_u)/2$ является проектором на собственное подпространство, соответствующее собственному значению -1 симметрии S_u. Далее определим $P_2(u)$ и $P_0(u)$ как проекторы из Z на $\overline{sp} F_u$ и $F_u^\diamondsuit$, соответственно, т.е. $P_2(u) + P_0(u) = (I + S_u)/2$. Проекторы $P_k(u)$ называются *геометрическими Пирсовскими проекторами.*

Сжимающий проектор Q на Z называется *нейтральным,* если для каждого $f \in Z$ равенство $\|Qf\| = \|f\|$ влечет $Qf = f$. Пространство Z называется *нейтральным,* если для каждой симметричной грани F_u, проектор $P_2(u)$, соответствующий симметрии S_u, является нейтральным.

Отметим, что если Z — предсопряженное пространство алгебры фон Неймана, то это пространство будет нейтральным (см. [3], предложение 2,6).

Приведем примеры нейтральных SFS-пространств.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = |x_1| + ... + |x_n|$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, является нейтральным SFS-пространством.

Пример 2. Гильбертово пространства H является нейтральным SFS — пространством. Всякий элемент $u \in H, \|u\| = 1$ является геометрическим трипотентом и $F_u = \{u\}$. Кроме того, симметрия S_u, соответствующая грани F_u, определяется следующим образом:

$$S_u(\lambda u + x) = \lambda u - x, \;\; \lambda u + x \in sp\{u\} \oplus u^\perp = H.$$

Пример 3. l_1-сумма гильбертовых пространств является нейтральным SFS-пространством

Пример 4. Предсопряженное пространство алгебры фон Неймана A является нейтральным сильно гранево симметричным пространством. Отметим, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством геометрических трипотентов и множеством ненулевых частичных изометрий (см. [3], теорема 2.11). Если v – геометрический трипотент, то геометрические Пирсовские проекторы, соответствующие v, определяются с помощью Пирсовских проекторов, соответствующих частичной изометрии v, т.е.

$$P_2\left(v\right)=E\left(v\right),\quad P_1\left(v\right)=G\left(u\right),\ \ P_0\left(v\right)=F\left(v\right).$$

Далее $U=Z^*, Z_k(u)=Z_k(F_u)=P_k(u)Z$ и $U_k(u)=U_k(F_u)=P_k(u)^*(U)$, и следовательно имеет место разложение Пирса $Z=Z_2(u)+Z_1(u)+Z_0(u)$ и $U=U_2(u)+U_1(u)+U_0(u)$. Трипотенты u и v называются *ортогональными,* если $u\in U_0(v)$ (которое влечет $v\in U_0(u)$) или эквивалентно $u\pm v\in\mathcal{GT}$ (см. [1], лемма 2.5]). Элементы a и b из U называются *ортогональными,* если один из них принадлежит $U_2(u)$, а другой принадлежит $U_0(u)$ для некоторого геометрического трипотента u.

В нейтральном SFS-пространстве Z, каждый ненулевой элемент допускает *полярное разложение*(см. [2], теорема 4.3]): для $0\neq f\in Z$ существует единственный геометрический трипотент $v=v_f$ с $v(f)=\|f\|$ и $\langle v,f^{\diamond}\rangle=0$. Если $f,g\in Z$, то $f\diamond g$ в том и только в том случае, когда $v_f\diamond v_g$ (см. [1], следствие 1.3(б) и лемма 2.1).

§ 3. Основной результат

Говорят, что слабо гранево симметричное пространство обладает свойством (PE) (“выставленности точек”), если каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.

Говорят [4], что нейтральное сильно гранево симметричное пространство Z обладает свойством (STP) (“симметричность переходных вероятностей”), если для любой пары экстремальных точек f и g выполняется равенство $\overline{\langle f,\ \vartheta_g\rangle}=\langle g,\ \vartheta_f\rangle$, где $\overline{\langle f,\ \vartheta_g\rangle}$ – комплексное сопряженное число к $\langle f,\ \vartheta_g\rangle$.

Напомним [4], что геометрический трипотент v называется минимальным, если $\dim U_2(v)=1$. Через M обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов. В сильно гранево симметричном пространстве для всякого $v\in M$ грань F_v состоит из единственной точки, т.е. каждому $v\in M$ соответствует единственная выставленная по норме точка $f_v\in Z_1$ (см. ([4], предложение 2.4). Кроме того, $P_2(v)^*x=f_v\left(x\right)v$ и $P_2\left(v\right)g=g\left(v\right)f_v$ для всех $x\in Z^*$ и $g\in Z$.

Лемма 3.1. *Пусть Z нейтральное SFS-пространство. Если $u \in M$, то $\alpha u \in M$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.*

Доказательство. Пусть $u \in M$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, тогда в силу ([11], лемма 3.5) следует, что αu является геометрическим трипотентом и $F_{\alpha u} = \alpha F_u$. Тогда $Z_2(\alpha u) = \overline{sp} F_{\alpha u} = \overline{sp} \alpha F_u = \overline{sp} F_u = Z_2(u)$. Поэтому, $U_2(\alpha u) = U_2(u)$. Значит, $\dim U_2(\alpha u) = 1$, т.е. $\alpha u \in M$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. $\square$

Пусть Z – нейтральное SFS-пространства $u,\ v \in M$. Определим псевдо-вероятность перехода от u к v как число, заданное формулой $(u,\ v) = f_v\,(u)$.

Нормированное пространство Z называется атомическим, если каждая симметричная грань Z_1 имеет экстремальную точку.

Нормированное пространство Z называется пространством ранга 1, если в нем не существуют взаимно ортогональных отличных от нуля элементов.

Примером пространства ранга 1 является гильбертово пространство и более общее, строго нормированное пространство.

Пусть X и Y — атомические нейтральные SFS – пространства. Через M_X и M_Y обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов X и Y, соответственно.

Предложение 3.2. *Пусть X и Y атомические нейтральные SFS-пространства ранга 1 со свойствами PE и STP. Если преобразование $P : M_X \to M_Y$ сохраняет псевдо-вероятность перехода, т.е.*

$$(P\,(u)\,,\,P\,(v)) = f_{P(v)}\,(P\,(u)) = f_v\,(u) = (u,\ v)\,,$$

тогда P продолжается до изометрического изоморфизма из X^* в Y^*.

Доказательство. Пусть X и Y атомические нейтральные SFS-пространства ранга 1 со свойствами PE и STP. Тогда в силу ([4], следствие 2.11), мы можем предположить, что X и Y — два гильбертовых пространства. Заметим, что $M_X = \partial X_1^*$ (∂X_1^* – единичная сфера X^*) и $M_X = \partial Y_1^*$. Поскольку f_v является функционалом определяемый формулой $f_v\,(x) = \langle x,\, v\rangle$ для каждого $v \in \partial X_1^*$ и $x \in X^*$, то сохранение псевдо-вероятностного перехода для P эквивалентна следующему:

$$\langle P\,(u)\,,\,P\,(v)\rangle = \langle u,\ v\rangle \text{ для всех } u,\, v \in M_X.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\|P\,(u) - P\,(v)\|^2 = (P\,(u) - P\,(v)\,,\ P\,(u) - P\,(v)) =$$
$$= (P\,(u)\,,\ P\,(u)) - (P\,(v)\,,\ P\,(u)) - (P\,(u)\,,\ P\,(v)) + (P\,(v)\,,\ P\,(v)) =$$
$$= (u,\ u) - (v,\ u) - (u,\ v) + (v,\ v) = \|u - v\|^2$$

для всех u, $v \in M_X$. Следовательно, Р : $M_X \to M_Y$ является изометрий. Так как P сохраняет псевдо-вероятностный переход, имеем

$$\langle -P(v),\ P(-v)\rangle = -\langle P(v),\ P(-v)\rangle = -\langle v,\ -v\rangle = 1.$$

Поэтому, $P(-v) = -P(v)$ для всех $v \in M_X$. Тогда в силу ([12], теорема 2.2) отображение P можно расширить до вещественной линейной изометрии $T : X \to Y$.

Наконец, мы покажем, что T комплексно линейна. Для начала, пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Тогда в силу леммы 3.1 следует, что $\alpha v \in M_X$. Следовательно, из предположений для P имеем

$$\langle \alpha P(v),\ P(\alpha v)\rangle = \alpha\langle P(v),\ P(\alpha v)\rangle = \alpha\langle v,\ \alpha v\rangle = 1.$$

Поэтому, $P(\alpha v) = \alpha P(v)$. Значит, $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\alpha = a + ib$. Тогда из вещественной линейности T и предыдущего случая имеем

$$T(\alpha v) = T((a+ib)v) = T(av) + T(ibv) = aT(v) + ibT(v) = \alpha T(v),$$

т,е. T – комплексно линейна. $\square$

В работе ([13], следствие 6, предложение 7) было доказано, что вещественное рефлексивное сильно гранево симметричное пространство ранга 1 обладает свойствами PE и STP. Поэтому из предложения 2.2. следует следующие следствие.

Следствие 3.3. *Пусть X и Y вещественные рефлексивные SFS-пространства ранга 1. Тогда преобразование $P : M_X \to M_Y$ сохраняющее псевдо-вероятность перехода продолжается до изометрического изоморфизма из X^* в Y^*.*

Теорема 3.4. *Пусть X и Y рефлексивные атомические нейтральные SFS-пространства со свойствами PE. Если $P : M_X \to M_Y$ преобразование сохраняющее ортогональность между геометрическими трипотентами и псевдо-вероятность перехода, тогда P продолжается до изометрического изоморфизма из X^* в Y^*.*

Доказательство. Пусть $P : M_X \to M_Y$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j v_j$ где α_j, $\beta_j \in \mathbb{C}$, u_j, $v_j \in M_X$. В силу ([4], предложение 2.4) для каждого $\varphi \in \exp Y_1$ существует $\bar{w} \in M_Y$ такой, что $\varphi = \varphi_{\bar{w}}$. Тогда в силу сохранения псевдовероятности перехода P имеем $P(w) = \bar{w} \in M_Y$ для некоторого $w \in M_X$ и $\varphi = \varphi_{\bar{w}} = \varphi_{P(w)}$. Более того, имеем

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P\left(u_j\right)\right)=\varphi_{P(w)}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P\left(u_j\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_{P(w)}P\left(u_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_w\left(u_j\right)=\varphi_w\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)=\varphi_w\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j u_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi_w\left(v_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi_{P(w)}\left(P\left(v_j\right)\right)=$$

$$=\varphi_{P(w)}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j P\left(v_j\right)\right)=\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j P\left(v_j\right)\right).$$

Поэтому из произвольности φ следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P\left(u_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j P\left(v_j\right). \tag{3.1}$$

В силу спектральной теоремы для рефлексивных SFS-пространств (см. ([1], теорема 1) и ([14], теорема 1), каждый элемент $x\in X^*$ однозначно представляется в виде $x=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i v_i$, где $\lambda_1>...>\lambda_n>0$, $v_k\in M_X$ и $v_k\diamond v_l$, $(k\neq l,\ k,\ l=1,\ 2,\ ...,\ m,\quad m\in\mathbb{N})$. Тогда в силу (3.1) для каждого $x\in X^*$ определим отображение

$$P_0:X^*\to Y^*, P_0\left(x\right)=P_0\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P\left(v_i\right) \tag{3.2}$$

которое является линейным оператором. Кроме того, $P_0\left(v\right)=P\left(v\right)$ для всех $v\in M_X$. Так как P сохраняет ортогональность между геометрическими трипотентами, тогда в силу ([1], лемма 2.1) и из (3.2) имеем

$$\left\|P_0\left(x\right)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P\left(u_i\right)\right\|=\max\left\{\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n\right\}=\lambda_1=\left\|x\right\|.$$

Следовательно, P_0 – изометрия. Аналогичным образом мы можем определить линейное отображение $R_0:Y\to X$ удовлетворяющий $R_0\left(P\left(u\right)\right)=u$ для всех $u\in M_X$ и $R_0=P_0^{-1}$. Следовательно, P_0 и R_0 являются биекциями. Значит, P_0 – изометрический изоморфизм. $\square$

Литература

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem // *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 1986. Vol. 37. № 147. P. 263–277; DOI: 10.1093/qmath/37.3.263

2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1989. Vol. 106. № 1. P. 107–124; DOI: 10.1017/S030500410006802X

3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras // *Pacific. J. Math.* 1989. Vol./,137. № 1. P. 123–144; DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123

4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor // *Proc. London Math. Soc.* 1992. Vol. 65. № 1. P. 142–174; DOI:10.1112/plms/s3-65.1.142

5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces // *Canad. J. Math.* 1993. Vol. 45. № 1. P. 33–87. DOI:10.4153/CJM-1993-004-0

6. *Neal M., Russo B.* State space of JB * -triples // *Math. Ann.* 2004. Vol./,328. № 4. P. 585–624. DOI: 10.1007/s00208-003-0495-9

7. *Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х.* Геометрическая характеризация вещественных JBW-факторов // *Владикавк. мат. журн.* 2018. Том. 20. Выпуск 1, С. 61–68; DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11398

8. *Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X.* Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // *Siberian Advances in Mathematics.* 2020. Vol. 30, № 2, P. 117—123. DOI: 10.3103/S1055134420020042

9. *Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. Kh.* Characterization of JBW-Algebras with Strongly Facially Symmetric Predual Space // *Mathematical Notes.* 2020. Vol. 107. № 4. - P. 600–608. DOI: 10.1134/S000143462003027X

10. *Seypulaev J. X.* Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2019. Vol. 40. № 12. P. 2111—2115. DOI:10.1134/S1995080219120126

11. *Seypulaev J. X.* Finite geometric tripotents and finite SFS-spaces // *Uzbek Math. Journal.* 2020. № 4. P. 140–148. DOI: 10.29229/uzmj.2020-4-15

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 99-110

12. *Ding G. G* The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space // *Sci. China Ser.* 2002. Vol. 45. № 4. P. 479—483; DOI: 10.1007/BF02872336

13. *Сейпуллаев Ж. Х.* Геометрическая характеризация гильбертовых пространств // *Узб. матем. журн.* 2008. № 2. С. 107–112.

14. Ibragimov M. M., Tleumuratov S. J., Seypulaev J. Some geometric properties of a strongly facially symmetric space // *Methods of functional analysis and topology*; 2005. № 11. P. 234–238. http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=298

References

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem // *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 1986. Vol. 37. № 147. P. 263–277. DOI: 10.1093/qmath/37.3.263

2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1989. Vol. 106. № 1. P. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X

3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras // *Pacific. J. Math.* 1989. Vol./,137. № 1. P. 123–144; DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123

4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor // *Proc. London Math. Soc.* 1992. Vol. 65. № 1. P. 142–174; DOI:10.1112/plms/s3-65.1.142

5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces // *Canad. J. Math.* 1993. Vol. 45. № 1. P. 33–87. DOI:10.4153/CJM-1993-004-0

6. *Neal M., Russo B.* State space of JB * -triples // *Math. Ann.* 2004. Vol./,328. № 4. P. 585–624. DOI: 10.1007/s00208-003-0495-9

7. *Ibragimov M. M., Kudaybergenov K. K.,Seypullaev J. X.* Geometric characterization of real JBW factors // *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal.* 2018. Vol. 20. Issue 1, P. 61–68. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11398

8. *Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X.* Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // *Siberian Advances in Mathematics.* 2020. Vol. 30, № 2, P. 117—123. DOI: 10.3103/S1055134420020042

9. *Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. Kh.* Characterization of JBW-Algebras with Strongly Facially Symmetric Predual Space // *Mathematical Notes.* 2020. Vol. 107. № 4. - P. 600–608. DOI: 10.1134/S000143462003027X

10. *Seypulaev J. X.* Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2019. Vol. 40. № 12. P. 2111—2115. DOI:10.1134/S1995080219120126

11. *Seypulaev J. X.* Finite geometric tripotents and finite SFS-spaces // *Uzbek Math. Journal.* 2020. № 4. P. 140–148. DOI: 10.29229/uzmj.2020-4-15

12. *Ding G. G* The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space // *Sci. China Ser.* 2002. Vol. 45. № 4. P. 479—483; DOI: 10.1007/BF02872336

13. *Seypullaev J. X.* Geometric characterization of Hilbert spaces // *Uzbek Mathematical Journal.* 2008. № 2. P. 107–112.

14. Ibragimov M. M., Tleumuratov S. J., Seypulaev J. Some geometric properties of a strongly facially symmetric space // *Methods of functional analysis and topology.* 2005. № 11. P. 234–238; http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=298

Информация об авторах

Жумабек Хамидуллаевич Сейпуллаев, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 9503-6631 AuthorID: 1252358
Scopus Author ID 57202628285

Камалатдин Бахытбай улы Каленбаев, младший научный сотрудник

Author Information

Jumabek Kh. Seypullaev, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 9503-6631 AuthorID: 1252358
Scopus Author ID 57202628285

Kamalatdin B. Kalenbaev, Junior researcher

*Статья поступила в редакцию 17.04.2024;
одобрена после рецензирования 18.06.24; принята к публикации 26.09.2024*

*The article was submitted 17.04.2024;
approved after reviewing 18.06.24; accepted for publication 26.09.2024*

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 99-110