Научная статья
УДК 519.21
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-19-25

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АВТОНОРМИРОВАННЫХ СУММ СИММЕТРИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Игорь Семёнович Борисов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
sibam@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000-0002-1568-9782

Аннотация

Получены точные моментные неравенства для одного класса аналитических функций от автонормированных сумм независимых симметрично распределенных случайных величин.

Ключевые слова и фразы

автонормированные суммы независимых случайных величин, симметричные распределения, моментные неравенства.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

Для цитирования

Борисов И. С. Об одном экстремальном свойстве автонормированных сумм симметрично распределенных случайных величин // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 19-25. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-19-25

AN EXTREMAL PROPERTY OF SELF-NORMALIZED SUMS FOR SYMMETRIC RANDOM VARIABLES

Igor S. Borisov

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
sibam@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000-0002-1568-9782

Abstract

Sharp moment inequalities are obtained for a class of analytic functions of self-normalized sums of independent symmetrically distributed random variables.

Keywords

Self-normalized sums of independent random variables, symmetric distributions, moment inequalities.

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2024-0001)

For citation

Borisov I. S. An extremal property of self-normalized sums for symmetric random variables // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 19-25. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-19-25

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин (не обязательно одинаково распределенных) и пусть N — случайная величина со стандартным гауссовским распределением. Положим $S_n := \sum_{i\le n} X_i$ и $V_n^2 := \sum_{i\le n} X_i^2$. Отношение S_n/V_n называется *автонормированной суммой*. Если $V_n = 0$, то по определению полагаем $0/0 = 0$. Пусть $G(\cdot)$ — целая функция на вещественной прямой, имеющая в нуле неотрицательные производные всех четных порядков, начиная со второго, при этом $\mathbf{E}|G(N)| < \infty$.

Тематика настоящей работы не так давно была достаточно популярной в вероятностной литературе (см., например, работу [1] и список литературы в ней). Предлагаемая читателю короткая заметка была мотивирована статьями [2] и [3], где были получены замечательные результаты для автонормированных сумм. Приводимая ниже теорема несколько улучшает соответствующие результаты этих работ, касающиеся моментных неравенств для автонормированных сумм в случае симметрично распределенных слагаемых.

Теорема. *Пусть X_i распределены симметрично для всех $i \leq n$. Тогда для любой функции G, удовлетворяющей вышеупомянутым условиям, справедливо следующее равенство*:

$$\sup \mathbf{E}G(S_n/V_n) = \mathbf{E}G(N), \tag{1}$$

где супремум берется по всем натуральным n и всем симметричным распределениям X_i.

В качестве примеров в (1) можно рассмотреть следующие функции:
1) $G_1(x) := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, где m — произвольное натуральное число и $a_{2k} \geq 0$ для всех $k \geq 1$;
2) $G_2(x) := \exp(tx)$ для любого фиксированного $t \in \mathbf{R}$;
3) $G_3(x) := \exp(tx^2)$ для любого фиксированного $t \in [0, 1/2)$.

Для первого примера имеем имеем $\mathbf{E}G_1(N) = \sum_{k=0}^{[m/2]} a_{2k}(2k-1)!!$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, $(2k-1)!! := (2k-1)(2k-3)...1$ и по определению полагаем $(-1)!! = 1$. Для второго и третьего примеров соответственно имеем $\mathbf{E}G_2(N) = \exp(t^2/2)$ и

$$\mathbf{E}G_3(N) = (1-2t)^{-1/2}. \tag{2}$$

Замечание 1. В [2] (формула (2.14)) установлена следующая верхняя оценка для моментов автонормированных сумм независимых одинаково распределенных слагаемых с симметричным распределением:

$$\sup_n |S_n/V_n|^k \leq (k-1)^{k/2} \quad \forall k \geq 2. \tag{3}$$

Приведенная выше теорема позволяет заменить эту верхнюю оценку меньшим числом $(k-1)!!$ для любого четного k. Для произвольного $k \geq 2$ (не обязательно целого) можно использовать либо неравенство Гёльдера, либо монотонность функции

$$g(t) := \mathbf{E}|S_n/V_n|^t, \ \ t \geq 2.$$

Последнее утверждение следует из неравенства Гёльдера и того факта, что (см. формулу (7) ниже)

$$\mathbf{E}(S_n/V_n)^2 = 1.$$

Таким образом, мы можем свести проблему к упомянутому выше случаю четных степеней, получая лучшие верхние оценки, чем (3).

Далее, в [3] (формула (2.4)) было доказано, что

$$\mathbf{E}\exp(t(S_n/V_n)^2) \leq \frac{2}{1-2t} \quad \forall t < 1/2.$$

Ясно, что для $t \in [0, 1/2)$, эта оценка хуже чем (1) и (2).

Доказательство теоремы. Заметим, что в силу неравенства Коши–Буняковского для сумм справедлива оценка

$$|S_n/V_n| \le \sqrt{n} \tag{4}$$

для всевозможных значений случайных величин $X_1, ..., X_n$. Следовательно, математическое ожидание в левой части (1) корректно определено.

Сначала мы изучим математическое ожидание произвольной степенной функции с четным показателем.

Лемма. *Для всех натуральных n и m,*

$$\mathbf{E}(S_n/V_n)^{2m} \le \mathbf{E}(N)^{2m}. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}(S_n/V_n)^{2m} = \sum_{i_1,...,i_{2m} \le n} \mathbf{E}\{X_{i_1}...X_{i_{2m}}/V_n^{2m}\}. \tag{6}$$

В силу симметричности распределений сомножителей вида $X_i/\sqrt{X_i^2 + C}$ под знаком среднего в (6) каждое ненулевое математическое ожидание в правой части из (6) можно представить как

$$\mathbf{E}\{X_{i_1}^{2k_1}...X_{i_{2m}}^{2k_{2m}}/V_n^{2m}\},$$

где $k_j = 0, 1, ...,$ and $k_1 + ... + k_{2m} = m$.

Пусть $\{N_i\}$ — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, независимых еще и от $\{X_i\}$. Так как $\mathbf{E}N_i^{2k_i} = (2k_i - 1)!! \ge 1$, то справедлива оценка

$$\mathbf{E}\{X_{i_1}^{2k_1}...X_{i_{2m}}^{2k_{2m}}/V_n^{2m}\} \le \mathbf{E}\{(N_{i_1}X_{i_1})^{2k_1}...(N_{i_{2m}}X_{i_{2m}})^{2k_{2m}}/V_n^{2m}\}.$$

Подставляя эти мажоранты в сумму в (6), получаем

$$\mathbf{E}(S_n/V_n)^{2m} \le \mathbf{E}(\tilde{S}_n/V_n)^{2m},$$

где $\tilde{S}_n = \sum_{i \le n} N_i X_i$. Условное распределение $\tilde{S}_n$ при фиксации $\{X_i\}$ является $(0, V_n)$-гауссовским (в случае $V_n = 0$ это распределение является единичной массой в нуле). Тогда соответствующее условное среднее случайной величины $(\tilde{S}_n)^{2m}$ равно $(2m-1)!!V_n^{2m}$. Отсюда сразу получаем (5). Лемма доказана.

Замечание 2. Для доказательства неравенства (5) можно использовать основной результат работы [4], где аналогичная верхняя оценка была доказана для любого абсолютного степенного (не обязательно целого) момента порядка $m \geq 3$ для линейных форм типа $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$, где $\{\varepsilon_i\}$ - независимые случайные величины с распределением Радемахера, а константы $\{a_i\}$, удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Действительно, хорошо известно, что автонормированную сумму можно представить по распределению в виде

$$S_n/V_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i, \tag{7}$$

где $a_i = X_i/V_n$, предполагая, что семейства случайных величин $\{X_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ независимы. Осталось воспользоваться результатом из [4] для условного математического ожидания автонормированной суммы по последовательности $\{X_i\}$. Стоит отметить, что доказательство основного результата в [4] слишком громоздкое. Мы приводим очень простое альтернативное доказательство неравенства (5) в случае четных моментов, которое, на наш взгляд, заслуживает внимание читателя.

Продолжим доказательство теоремы. Определение целых функций означает, что

$$G(x) = \sum_{k\geq 0} G^{(k)}(0)x^k/k!$$

для всех $x \in \mathbf{R}$, где выписанный ряд абсолютно сходится. Если мы положим $x = S_n/V_n$, то с помощью (5) и теоремы Фубини получаем равенство

$$\mathbf{E}G(S_n/V_n) = \sum_{m\geq 0} G^{(2m)}(0)\mathbf{E}(S_n/V_n)^{2m}/(2m)!. \tag{8}$$

Аналогично обосновывается равенство

$$\mathbf{E}G(N) = \sum_{m\geq 0} G^{(2m)}(0)\mathbf{E}(N)^{2m}/(2m)!.$$

Так что вышеприведенная лемма влечет за собой неравенство

$$\mathbf{E}G(S_n/V_n) \leq \mathbf{E}G(N). \tag{9}$$

Далее рассмотрим произвольную последовательность $\{X_i\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с общим симметричным распределением с конечным вторым моментом. В этом случае последовательность случайных величин S_n/V_n сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине N. Докажем сходимость любых четных моментов рассматриваемых случайных величин. Действительно, с помощью неравенств Коши-Буняковского и Маркова из (5) легко выводится следующая оценка:

$$\mathbf{E}(S_n/V_n)^{2m} I\{|S_n/V_n| \geq T\} \leq \mathbf{E}^{1/2}(S_n/V_n)^{4m}\mathbf{P}^{1/2}\{|S_n/V_n| \geq T\}$$

$$\leq \mathbf{E}(S_n/V_n)^{4m}T^{-2m} \leq \mathbf{E}(N)^{4m}T^{-2m}.$$

Другими словами, известное условие равномерной интегрируемости выполнено. Следовательно, из упомянутой выше слабой сходимости распределений следует сходимость всех четных моментов S_n/V_n. Принимая во внимание оценку (5) и используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости для ряда в (8), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}G(S_n/V_n) = \mathbf{E}G(N).$$

Равенство (1) следует из последнего соотношения и неравенства (9). Теорема доказана.

Список литературы

1. *De la* Peña *V.H., Klass M.J., and Lai T.L.* Self-normalized processes: exponential inequalities, moment bounds and iterated logarithm laws // *Ann. Probab.* 2004. V. 1902, N. 32.

2. *Giné E., and Mason D.* When is the Student t-statistic asymptotically standard normal? // *Ann. Probab.* 1997. V. 1514, N. 25.

3. *Giné E., and Mason D.* On the LIL for self-normalized sums of IID random variables // *J. Theor. Probab.* 1998. V. 351, N. 11.

4. *Whittle P.* Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent variables // *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 1960. V. 331, N. 5. P. 118-134.

References

1. *de la* Peña *V.H., Klass M.J., and Lai T.L.* Self-normalized processes: exponential inequalities, moment bounds and iterated logarithm laws // *Ann. Probab.* 2004. V. 1902, N. 32.

2. *Giné E., and Mason D.* When is the Student t-statistic asymptotically standard normal? // *Ann. Probab.* 1997. V. 1514, N. 25.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 19-25
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 19-25

3. *Giné E., and Mason D.* On the LIL for self-normalized sums of IID random variables // *J. Theor. Probab.* 1998. V. 351, N. 11.

4. *Whittle P.* Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent variables // *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 1960. V. 331, N. 5. P. 118-134.

Информация об авторе

Игорь Семёнович Борисов, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN-код: 7156-3779, AuthorID: 5279
Scopus Author ID 24330663400
WoS ResearcherID www.ResearcherID.com;
https://publons.com/researcher/G-1112-2019/

Author Information

Igor S. Borisov, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN-код: 7156-3779, AuthorID: 5279
Scopus Author ID 24330663400
WoS ResearcherID www.ResearcherID.com;
https://publons.com/researcher/G-1112-2019/

Статья поступила в редакцию 07.09.2024;
одобрена после рецензирования 10.10.2024; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 07.09.2024;
approved after reviewing 10.10.2024; accepted for publication 30.10.2024