Научная статья
УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-115-140

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Мирганд Шабозович Шабозов[1]
Адолат Аъзамовна Шабозова[2]

[1,2] Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан
[1] shabozov@mail.ru,
[2] shabozova91@gmail.com

Аннотация

В пространствах Харди $H_{q,\rho}\,(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le R)$ и весовых пространствах Бергмана $\mathscr{B}_{q,\gamma}$ и $\mathscr{L}_{q,\gamma}$ $(1 \le q < \infty,\ \gamma \ge 0)$ найдены наилучшие линейные методы приближения классов $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ функций $f \in H_{q,R}$, у которых r-я производная $f_a^{(r)}$ по аргументу t комплексной переменной $z = \rho\exp(it)$ также принадлежат $H_{q,R}$, и удовлетворяют условию

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt \le \Phi(h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, $\omega(\varphi, t)_{H_{q,R}}$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in H_{q,R}$. Вычислены точные значения ряда n-поперечников класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ в указанных пространствах.

Ключевые слова и фразы

наилучшие методы линейных приближений, модуль непрерывности, пространство Харди, весовое пространство Бергмана, n-поперечники.

Для цитирования

Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. О точных значениях поперечников классов аналитических в круге функций //*Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 115-140. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-115-140

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

ON EXACT VALUES OF WIDTHS OF CLASSES OF FUNCTIONS ANALYTIC IN A DISK

Mirgand Sh. Shabozov[1], **Adolat A. Shabozova**[2],

[1,2] Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan.

[1]shabozov@mail.ru,
[2]shabozova91@gmail.com

Abstract

In Hardy spaces $H_{q,\rho}\,(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le R)$ and weighted Bergman spaces $\mathscr{B}_{q,\gamma}$ and $\mathscr{L}_{q,\gamma}$ $(1 \le q < \infty, \gamma \ge 0)$, the best linear approximation methods for classes $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ of functions are obtained. These are functions $f \in H_{q,R}$ whose r-th derivative $f_a^{(r)}$ with respect to the argument t of the complex variable $z = \rho\exp(it)$ also belongs to $H_{q,R}$ and satisfies the condition

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f_a^{(r)},t)_{H_{q,R}}\,dt \le \Phi(h),$$

where $h \in \mathbb{R}_+$, $\omega(\varphi,t)_{H_{q,R}}$ is the modulus of continuity of the function $\varphi \in H_{q,R}$. The exact values of certain n-widths of the class $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ in the mentioned spaces are calculated.

Keywords

best linear approximation methods, modulus of continuity, Hardy space, weighted Bergman space, n-widths.

For citation

On exact values of widths of classes of functions analytic in a disk //*Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-115-140

§ 1. Введение и предварительные сведения

Вопросы вычисления точных значений поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций и построения наилучших линейных методов приближения в пространстве Харди H_q $(1 \le q \le \infty)$ рассматривались, например, в работах [1–13] (см. также литературу, приведенную в них).

В данной заметке, продолжающей исследования указанной тематики, найдены значения различных n-поперечников некоторых классов аналитических функций, вытекающих из работы Л.В.Тайкова [3].

Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса R в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\mathcal{A}(U_R)$ — множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U_R)$ при $0 < \rho < R$ положим

$$M_q(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } \ 1 \le q < \infty, \\ \max\left\{|f(\rho e^{it})| : 0 \le t < 2\pi\right\}, & \text{если } \ q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \le q \le \infty$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U_R)$, для которых конечна норма [10, 11]

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \to R-0} M_q(f,\rho).$$

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях $f(Re^{it}) \in L_q[0,2\pi]$ $(1 \le q \le \infty)$, то есть

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } \ 1 \le q < \infty, \\ \operatorname{essup}\left\{|f(Re^{it})| : 0 \le t < 2\pi\right\}, & \text{если } \ q = \infty. \end{cases}$$

Символом $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \le R)$ обозначим пространство Харди функции $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которой $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$ при всех $0 < \rho \le R$. В случае $R = 1$ полагаем $H_{q,1} := H_q$, $\|f\|_{H_{q,1}} := \|f\|_{H_q}$, $U_1 := U$.

Через $\mathscr{L}_q := \mathscr{L}_q(U)\,(1 \le q \le \infty)$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму [8]

$$\|f\|_{\mathscr{L}_q} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^q dt d\rho\right)^{1/q},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная, измеримая, не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $\mathscr{L}_{q,\gamma} := \mathscr{L}_q(U,\gamma)$ $(1 \le q < \infty)$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/q} f \in \mathscr{L}_q(U), \quad \|f\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} := \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathscr{L}_q}.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

Под $\mathscr{B}_{q,\gamma} := \mathscr{B}_q(U,\gamma)$ $(1 \le q < \infty)$, понимаем банахово пространство функций $f \in \mathcal{A}(U)$ таких, что $f \in \mathscr{L}_{q,\gamma}$. При этом [11]

$$\|f\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)M_q^q(f,\rho)d\rho\right)^{1/q}.$$

В частном случае $\gamma(\rho) \equiv 1$ пространство $\mathscr{B}_{q,1} \equiv \mathscr{B}_q$ есть хорошо известное пространство Бергмана [8]. Экстремальные задачи полиномиального приближения аналитических в круге функций, связанные с весовыми пространствами Бергмана, рассмотрены, например, в работах [6, 11, 14, 15].

§ 2. Основные результаты

Символом $f_a^{(r)}(z)$ $(z \in U,\ r \in \mathbb{N})$ обозначим производную r-го порядка аналитической функции $f(z)$ по аргументу t комплексной переменной $z = \rho\exp(it)$, то есть

$$f_a'(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = f'(z)\cdot zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a',\ r \ge 2,\ r \in \mathbb{N}.$$

Под $H_{q,R,a}^{(r)}$ понимаем класс функций $f \in \mathcal{A}(U_R)$, для которых $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$. Структурные свойства функции $f \in H_{q,R,a}^{(r)}$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f_a^{(r)},\delta)_{H_{q,R}} = \sup\left\{\|f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot+h/2)}) - f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot-h/2)})\|_{H_q} : |h| \le \delta\right\}$$

граничных значений $f_a^{(r)}(Re^{it})$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega(f_a^{(r)},\delta)_{H_{q,R}}$. Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше n. Равенством

$$E_{n-1}(f)_X := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_X : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства X.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ *при любых* $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho < R$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \cdot E_{n-1}(f^{(r)}_a)_{H_{q,R}}, \qquad (1)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства работы [2], где (1) доказано в случае $\rho = R = 1$ (см. [2, теорема 1]). Пусть $p_{n-1}(f^{(r)}_a, z)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{(r)}_a$ в норме пространства $H_{q,R}$:

$$E_{n-1}(f^{(r)}_a)_{H_{q,R}} = \|f^{(r)}_a - p_{n-1}(f^{(r)}_a)\|_{H_{q,R}}.$$

Положим

$$Q(z) := Q(f^{(r)}_a, z) = f^{(r)}_a(z) - p_{n-1}(f^{(r)}_a, z).$$

Выражая коэффициенты $c_k(f)$ функции $f(z)$ по формуле Коши

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i n^r} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{Q(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad k, n \in \mathbb{N},\ k \ge n,$$

для $z \in U_R$ $(|z| = \rho \le R)$ полагая

$$d_k(f) = \frac{1}{2\pi i (2n-k)^r} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{Q(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad 0 \le k \le n-1$$

и поступая также как в [13, с.286], получаем

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k - \sum_{k=0}^{n-1} d_k(f) z^k$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{n^r} + 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^r} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Таким образом, с некоторым полиномом $p_{n-1}(z)$, зависящим от функции $f(z)$, справедлива формула

$$f(z) - p_{n-1}(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{n^r} + 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^r} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (2)$$

Полагая в (2) $z = \rho e^{it}$, $\zeta = Re^{i\theta}$ $(0 < \rho < R,\ 0 \le t, \tau \le 2\pi)$ и выполнив замену $\theta - t = \tau$, запишем (2) в виде

$$f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it})$$

$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\tau} Q(Re^{i(t+\tau)}) \left\{\frac{1}{n^r} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k}{(n+k)^r}\cos k\tau\right\} d\tau. \quad (3)$$

Легко проверить, что числовая последовательность $\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \frac{1}{(n+k)^r}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является выпуклой вниз, и её общий член стремится к нулю при $k \to \infty$. Но тогда, в силу леммы 2.3 [14, с.251], функция

$$\Phi_{n,r}(\rho/R, \tau) := \frac{1}{n^r} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k}{(n+k)^r}\cos k\tau$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, причём

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_{n,r}(\rho/R, \tau)d\tau = \frac{1}{n^r}. \quad (4)$$

Учитывая (3), запишем

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \le \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it})|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\tau} Q(Re^{i(t+\tau)})\Phi_{n,r}(\rho/R, \tau)d\tau\right|^q dt\right\}^{1/q}. \quad (5)$$

В силу обобщённого неравенства Минковского [16, с.395] с учётом (4) из (5), получаем

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}}$$

$$\le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |Q(Re^{it})|^q dt\right)^{1/q} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Phi_{n,r}(\tau)|d\tau\right)$$

$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \cdot \|Q\|_{H_{q,R}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_{q,R}}$$

и неравенство (1) доказано.

Непосредственным вычислением легко убедиться, что неравенство (1) для функции $f_0(z) = az^n \in H^{(r)}_{q,R,a}$ ($a \in \mathbb{C}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$) обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Л.В.Тайков [3] доказал, что для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,a}$ ($1 \le q \le \infty$) при любых $r, n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \le \frac{1}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_q} dt. \tag{6}$$

Тем же методом, что и в [3] для произвольной функции $f \in H^{(1)}_{q,R,a}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,R}} \le \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f'_a, t)_{H_{q,R}} dt. \tag{7}$$

Заменяя в (7) функцию f на производную $f_a^{(r-1)}$, для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ запишем

$$E_{n-1}(f_a^{(r-1)})_{H_{q,R}} \le \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt. \tag{8}$$

Учитывая (8), в неравенстве (1) заменяя r на $r-1$, $r \in \mathbb{N}$, для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ получаем

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} E_{n-1}(f_a^{(r-1)})_{H_{q,R}} \le$$

$$\le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt. \tag{9}$$

Пусть X – произвольное банахово пространство, $\mathcal{L}_n \subset X$ – подпространство размерности n, $V_n(f)_X := V(f, \mathcal{L}_n, \cdot)_X$ – линейный непрерывный оператор, переводящий X в $\mathcal{L}_n$. Через $E_n(f)_X := E(f, \mathcal{L}_n)_X$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства X, а через $\mathscr{E}\big(f, V_n(f)\big)_X$ – уклонение функции $f \in X$ от $V_n(f)_X$. Для множества $\mathfrak{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_X = \sup\left\{E_n(f)_X : f \in \mathfrak{M}\right\},$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, V, \mathcal{L}_n)_X := \sup\left\{\mathscr{E}\big(f, V_n(f)\big)_X : f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{10}$$

Пусть S — единичный шар в $X, \mathcal{L}^n \subset X$ — линейное подпространство коразмерности n. Для центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M} \subset X$ величины [14, 17]

$$b_n\left(\mathfrak{M}; X\right) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset X\right\},$$

$$d_n\left(\mathfrak{M}; X\right) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_X : \mathcal{L}_n \subset X\right\}, \tag{11}$$

$$d^n\left(\mathfrak{M}; X\right) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n\right\} : \mathcal{L}^n \subset X\right\},$$

$$\delta_n\left(\mathfrak{M}; X\right) = \inf\left\{\inf\left\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, V, \mathcal{L}_n)_X : V_n(f)_X \subset \mathcal{L}_n\right\} : \mathcal{L}_n \subset X\right\}$$

соответственно называют *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейными n-поперечниками.*

Если существует подпространство $\overline{\mathcal{L}}_{n+1} \subset X$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \overline{\mathcal{L}}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\},$$

то оно называется экстремальным для $b_n(\mathfrak{M}, X)$.

Подпространство $\mathcal{L}_n^* \subset X$, на котором нижняя грань в (11) достигается и имеет место равенство

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n^*)_X,$$

называют экстремальным подпространством для $d_n(\mathfrak{M}, X)$. При этом $\mathcal{L}_n^*$ является наилучшим аппаратом приближения множества $\mathfrak{M}$ в классе всех подпространств $\{\mathcal{L}_n\} \subset X$. Подпространство $\mathcal{L}_*^n \subset X$ коразмерности n, если оно существует, такое, что

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}_*^n\},$$

называют экстремальным для $d^n(\mathfrak{M}, X)$. Если существует линейный оператор $\widetilde{V} : X \to \widetilde{\mathcal{L}}_n$, для которого $\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{L}}_n)_X$, то его называют наилучшим линейным методом приближения множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X. Особый интерес представляет отыскание подпространств $\widetilde{\mathcal{L}}_n \subset X$ для которых

$$E(\mathfrak{M}, \widetilde{\mathcal{L}}_n)_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \widetilde{\mathcal{L}}_n)_X = d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X).$$

Между перечисленными выше n-поперечниками имеют место следующие соотношения [14, 17]:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}, X). \tag{12}$$

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, исходя из результата (9), рассмотрим класс аналитических функций

$$W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi) := \left\{ f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt \leq \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $h \in (0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Для произвольной функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{A}(U_R)$ положим

$$\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f, z) = c_0$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \left[\alpha_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)} \right\} c_k z^k, \tag{13}$$

где

$$\alpha_k := \int\limits_0^{\pi/(2n)} \cos kt \cdot \cos nt dt. \tag{14}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть f — произвольная функция из класса $H_{q,R,a}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$. Тогда при любых $0 < \rho \leq R$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\| f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f) \|_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt \tag{15}$$

и равенство достигается для функции $f_0(z) = z^n$.

Доказательство. Введём обозначения

$$V_{n-1,r-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n-1} c_k z^k,$$

где

$$\lambda_{k,n-1} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ 1 - \left(\dfrac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)}, & \text{если } k = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Легко убедиться, что для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ имеет место равенство

$$f(\rho z) - V_{n-1,r-1}(f, \rho z)$$
$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} f_a^{(r-1)}(Rze^{-it}) \Phi_{n,r-1}\left(\frac{\rho}{R}, t\right) dt, \tag{16}$$

где функция $\Phi_{n,r-1}(\rho/R, t)$ определена в последней строке уравнения (3).

Далее в качестве промежуточного приближения функции f, следуя [5, с. 343], воспользуемся функцией

$$\mathcal{F}_u(f, z) := \frac{\pi}{4u} \int_0^u [f(ze^{it}) + f(ze^{-it})] \cos\left(\frac{\pi t}{2u}\right) dt.$$

В этом равенстве, полагая $u = u_* := \pi/(2n)$ и разлагая подынтегральную функцию f в степенной ряда Тейлора, представим $\mathcal{F}_u$ в виде

$$\mathcal{F}(f, z) := \mathcal{F}_{u_*}(f, z)$$
$$= \frac{n}{2} \int_0^{\pi/(2n)} [f(ze^{it}) + f(ze^{-it})] \cos(nt) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k c_k z^k, \tag{17}$$

где константа α_k определена в (14).

Пользуясь разложением

$$f_a^{(r-1)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^{r-1} c_k z^k,$$

из (17) получаем

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (ik)^{r-1} c_k z^k.$$

Положим

$$V^*_{n-1,r-1}(f, z)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)} \alpha_k c_k z^k.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости интегрального представления

$$V^*_{n-1,r-1}(f, \rho z)$$

$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi i^{r-1}} \int\limits_0^{2\pi} V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), Rze^{-it}) e^{int} \Phi_{n,r-1}\left(\frac{\rho}{R}, t\right) dt. \tag{18}$$

Обозначим

$$\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f,z) := V_{n-1,r-1}(f,z) + V^*_{n-1,r-1}(f,z).$$

Тогда, учитывая равенства (16) и (18), имеем

$$f(\rho z) - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f,\rho z) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi i^{r-1}}$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r)}(Rze^{-it}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), Rze^{-it}) e^{int} \Phi_{n,r-1}\left(\frac{\rho}{R}, t\right) dt \right\}. \tag{19}$$

Применяя к разности (19) обобщённое неравенство Минковского и учитывая равенство (4), получаем

$$\begin{gathered} \|f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} \\ \le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^{r-1}} \|f_a^{(r-1)} - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{H_{q,R}} \\ \le \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^{r-1}} \left\{ \|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_{H_{q,R}} + \|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) \right. \\ \left. - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{H_{q,R}} \right\}. \end{gathered} \tag{20}$$

Оценим каждую из норм слагаемых в правой части последнего неравенства. В силу [9, с.668, формула (10), случай $\mu = 1$] запишем оценку сверху первого слагаемого

$$\|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_{H_{q,R}} \le \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} (1 - \sin nt) dt. \tag{21}$$

Второе слагаемое в (20) оценим как и в [5], считая, что $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ является алгебраическим полиномом некоторой степени m, то есть $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) \in \mathcal{P}_m$. Поскольку множество $\mathcal{P}_m$ всюду плотно в пространстве $H_{q,R}$, то приводимые далее математические операции над функцией $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ являются корректными. Используя равенство (19), где $\rho = R$ и в левой части равенства вместо функции $f(Rz)$ стоит $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz)$, а полиномиальный оператор имеет вид $V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz))$, запишем

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz))$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)}, Rze^{-it})\Phi_{n,2}(1,t)dt. \qquad (22)$$

Применяя к (22) обобщённое неравенство Минковского и учитывая равенство (4), имеем

$$\left\|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\right\|_{H_{q,R}}$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left\|\mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)})\right\|_{H_{q,R}} = \frac{1}{n^2}\left\|\mathcal{F}_a^{(1)}(f_a^{(r)})\right\|_{H_{q,R}}. \qquad (23)$$

Чтобы оценить норму в правой части неравенства (23) в формуле (17) вместо функции f полагая $f_a^{(r-1)}$, запишем

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) := \mathcal{F}_{u_*}(f_a^{(r-1)}, z)$$

$$= \frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[f_a^{(r-1)}(ze^{it}) + f_a^{(r-1)}(ze^{-it})\right]\cos ntdt. \qquad (24)$$

Подставив в (24) $z = Re^{i\theta}$ и ради удобства введя обозначения

$$\begin{gathered} f_a^{(r-1)}(Re^{i(\theta+t)}) = \varphi(R, \theta+t), \\ f_a^{(r-1)}(Re^{i(\theta-t)}) = \varphi(R, \theta-t), \\ \mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Re^{i\theta}) = \mathcal{F}(\varphi, \theta), \end{gathered} \qquad (25)$$

равенство (24) запишем в виде

$$\mathcal{F}(\varphi; R, \theta) = \frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[\varphi(R, \theta+t) + \varphi(R, \theta-t)\right]\cos ntdt. \qquad (26)$$

Дважды продифференцируя обе части (246) по θ, и выполнив по аналогии с [5, с. 343] интегрирование по частям, получим

$$\mathcal{F}''_\theta(\varphi; R, \theta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[\varphi'(R, \theta+t) - \varphi'(R, \theta-t)\right]\sin ntdt.$$

Отсюда

$$\|\mathcal{F}''_\theta(\varphi; R, \cdot)\|_{H_q}^q$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[\varphi'(R, \theta+t) - \varphi'(R, \theta-t)\right]\sin ntdt\right|^q d\theta.$$

Применяя к правой части полученного равенства обобщённого неравенство Минковского [16, с. 395, формула (19)], приходим к неравенству:

$$\|\mathcal{F}''_\theta(\varphi;\theta)\|^q_{H_{q,R}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|[\varphi'(R,\theta+t)-\varphi'(R,\theta-t)]\big|^q d\theta\right)\sin ntdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(\varphi';2t)_{H_{q,R}}\sin ntdt. \tag{27}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям (25), запишем неравенство (27) в виде:

$$\big\|\mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)})\big\|_{H_{q,R}}=\big\|\mathcal{F}_a^{(1)}(f_a^{(r)})\big\|_{H_{q,R}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(f_a^{(r)};2t)_{H_{q,R}}\sin ntdt. \tag{28}$$

Учитывая (28), из (23) получаем:

$$\big\|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)})-V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\big\|_{H_{q,R}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(f_a^{(r)},2t)_{H_{q,R}}\sin ntdt. \tag{29}$$

Из (20), (21) и (29) получаем требуемое неравенство (15). Непосредственное вычисление показывает, что на функции $f_0(z)=z^n\in H^{(r)}_{q,R,a}$ неравенство (15) обращается в равенство, это и завершает доказательство леммы.

Обозначим

$$(\sin x)_* := \{\sin x,\ \text{если } 0<x\leq\pi/2;\ \ 1,\ \text{если } x>\pi/2\}. \tag{30}$$

Теорема 2. *Если при любых $x\in(0,\pi/2]$ и $n\in\mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(\pi/n)}\geq\frac{\pi}{nx}\begin{cases}1-\cos(nx/2), & \text{если } 0<x\leq\pi/n;\\ 1+(nx-\pi)/2, & \text{если } x\geq\pi/n\end{cases} \tag{31}$$

то для произвольных $n,r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$, $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho\leq R$ справедливы равенства

$$\lambda_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi),H_{q,\rho})=\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{32}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\delta_n(\cdot)$. При этом линейный оператор $\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)$, определённый равенством (13), является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$.

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ из неравенства (15) получаем

$$\|f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt$$

$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{\pi}{4n^r} \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt\right) \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{33}$$

Отсюда, в силу соотношения (12), следует оценка сверху всех вышеперечисленных n-поперечников:

$$\lambda_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi), H_{q,\rho}) \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{34}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу бернштейновского n - поперечника, введём в рассмотрении $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\mathbb{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $\mathbb{S}_{n+1}$ содержится в классе $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$.

Далее нам понадобится следующее утверждение

Лемма 2. *Для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ выполняется неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq R^n n^r \|p_n\|_{H_q}. \tag{35}$$

Неравенство (35) для полинома $q_n(z) = bz^n$, $b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ обращается в равенство.

Доказательство. Поскольку для $p_n \in \mathcal{P}_n$:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \ \ z \in U_R,$$

на границе окружности $|z| = R$

$$p_{n,a}^{(r)}(Re^{it}) = \sum_{k=1}^{n} a_k (ik)^r R^k e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} a_k k^r R^k e^{i(kt+\pi r/2)},$$

то непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости соотношения

$$p_{n,a}^{(r)}(Re^{it})$$
$$= \frac{e^{i\pi r/2} R^n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{in\tau} p_n(e^{-i(t-\tau)}) \left\{ n^r + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^r}{R^k} \cos k\tau \right\} d\tau. \tag{36}$$

Легко проверить (см., например, [14, с. 251. леммы 2.3]), что функция

$$F_{n,r}(R,\tau) = n^r + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^r}{R^k} \cos k\tau$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$. При этом

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F_{n,r}(R,\tau) d\tau = n^r. \tag{37}$$

Применяя обобщенное неравенства Минковского из (36) с учётом (37), получаем

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{q,R}} \le R^n \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |p_n(e^{i\tau})|^q d\tau \right)^{1/q} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F_{n,r}(R,\tau)| d\tau \right)$$
$$= R^n n^r \|p_n\|_{H_q},$$

и неравенство (35) доказано. Знак равенства в (35) для полинома $q_n(z)$ проверяется непосредственным вычислением. Лемма 2 доказана.

Хорошо известно (см., например, [18]), что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любом $\rho \in (0,1]$ справедливо неравенство

$$\rho^n \|p_n\|_{H_q} \le \|p_n\|_{H_{q,\rho}}, \tag{38}$$

причём неравенство (38) тоже обращаются в равенство для вышеуказанного полинома $q_n(z)$. Из (35) и (38) получаем

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{q,R}} \le \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \tag{39}$$

Учитывая неравенство

$$\omega(p_n, t)_{H_{q,R}} \leq 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_* \cdot \|p_n\|_{H_{q,R}}, \tag{40}$$

вытекающее из одного результата [5, с. 345] в силу (39) запишем:

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \cdot \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \cdot 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*. \tag{41}$$

Рассмотрим два случая: а) $h \leq \pi/n$ и б) $h > \pi/n$.

В случае а) для произвольного полинома $p_n \in \mathbb{S}_{n+1}$ в силу (30), (41) и первого неравенства из ограничения (31) имеем:

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \cdot \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \cdot \frac{2}{h}\int_0^h \sin\frac{nt}{2} dt$$

$$\leq \frac{\pi}{nh} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{nh}{2}\right) \leq \Phi(h). \tag{42}$$

В случае б) снова в силу (30), (41) и второго неравенства из ограничения (31) получаем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \cdot \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \cdot \frac{2}{h}\left\{\int_0^{\pi/n} \sin\frac{nt}{2} dt + \int_{\pi/n}^h dt\right\}$$

$$= \frac{\pi}{nh} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left\{1 + (nh - \pi)/2\right\} \leq \Phi(h). \tag{43}$$

Из неравенств (42) и (43) следует включение $\mathbb{S}_{n+1} \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$, а потому, согласно определению бернштейновского n-поперечника, получаем

$$b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi), H_{q,\rho}) \geq b_n(\mathbb{S}_{n+1}, H_{q,\rho}) \geq \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{44}$$

Сопоставляя неравенства (34), (44) и (12), получаем требуемые равенства (32). Так как для функции

$$g(z) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^{-n}}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) z^n, \tag{45}$$

$$\mathscr{L}_{n-1,r-1}(g) \equiv 0, \quad \|g\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то функция $g \in \mathbb{S}_{n+1}$, а потому $g \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$. Поскольку

$$\sup\left\{\|f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)\right\}$$

$$= \|g - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(g)\|_{H_{q,\rho}} = \|g\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то $\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)$ является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$. Теорема 2 доказана.

Нам остается указать конкретную функцию Φ для которой ограничения (31) выполняются.

Теорема 3. *Множество мажорант Φ, удовлетворяющих условию (31), не пусто.*

Доказательство. Рассмотрим, например, функцию $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 1$. Ограничения (31), выполнение которых требуется доказать для функции Φ_*, в рассматриваемом нами случае имеют вид

$$\left(\frac{nx}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{nx}\begin{cases} 1 - \cos\dfrac{nx}{2}, & \text{если } 0 \leq nx \leq \pi; \\ 1 + (nx - \pi)/2, & \text{если } nx \geq \pi. \end{cases} \tag{46}$$

Полагая в (46) $nx = \mu\pi$ $(0 \leq \mu < \infty)$, получаем

$$\mu^{\alpha+1} \geq \begin{cases} 1 - \cos\dfrac{\mu\pi}{2}, & \text{если } 0 \leq \mu \leq 1; \\ 1 + (\mu - 1)\pi/2, & \text{если } \mu \geq 1. \end{cases} \tag{47}$$

Пусть $0 \leq \mu \leq 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+1} - \left(1 - \cos\frac{\mu\pi}{2}\right). \tag{48}$$

В бесконечно малой окрестности нуля имеем

$$\varphi(\mu) \geq \mu^{\alpha+1}\left(1 - \frac{\pi^2}{8}\mu^{1-\alpha}\right) \tag{49}$$

и так как $1 - \alpha = 2 - \dfrac{\pi}{2} > 0$, то при $\mu \to 0+$, $\varphi(\mu) \to 0$, откуда и следует, что $\varphi(\mu) \geq 0$. Кроме того, из (48) получаем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0, 1)$ функция (48) знакопостоянна.

Рассуждая от противного, полагаем, что существует точка $\eta \in (0, 1)$, в которой функция φ меняет знак. По теореме Ролля производная

$$\varphi'(\mu) = (\alpha + 1)\mu^\alpha - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\mu^\alpha - \sin\frac{\mu\pi}{2}\right) \tag{50}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Так как $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$, то вторая производная

$$\varphi''(\mu)=(\alpha+1)\alpha\mu^{\alpha-1}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{51}$$

на основании теоремы Ролля должна иметь на $(0,1)$ не менее трёх различных нулей. Но как следует из (51) на интервале $(0,1)$ функция φ'' является разностью двух положительных функций, одна из которых монотонно убывает и выпукла вниз, а другая монотонно убывает и выпукла вверх. Из геометрических соображений ясно, что φ'' может иметь на $(0,1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие означает, что $\varphi(\mu)>0$ для всех $\mu\in(0,1)$.

Пусть теперь $1\le\mu<\infty$. Тогда на основании второго неравенства из (47) рассмотрим функцию

$$\varphi_1(\mu):=\mu^{\alpha+1}-1-(\mu-1)\pi/2. \tag{52}$$

Из (52) получим

$$\varphi_1'(\mu)=(\alpha+1)\mu^{\alpha}-\pi/2=\frac{\pi}{2}(\mu^{\alpha}-1).$$

Отсюда следует, что $\varphi_1'(\mu)\ge 0$ на полуоси $[1,+\infty)$. Поскольку, как следует из (52), $\varphi_1(1)=0$, то $\varphi_1(\mu)\ge 0$ на полуоси $[1,+\infty)$. Полученное означает, что неравенство (47), а значит и условия (31), справедливы для функции Φ_* при любом $\mu\in(0,\infty)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $R\ge 1$, $1\le q<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $r\ge 2$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничениям (31). Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &b_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{B}_{q,\gamma})=b_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma})\\ &=d^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{B}_{q,\gamma})=d^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma})\\ &=d_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma})=\delta_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma})\\ &=E(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi))_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}=\mathcal{E}(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi))_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}\\ &=\sup\left\{\|f-\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}:f\in W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)\right\}\\ &=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^{-n}}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\int_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{53}$$

При этом: 1) подпространство

$$\mathcal{L}_n^*:=\operatorname{span}\left\{1;\left\{R^{2(n-k)}+\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\right.\right.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

$$\times \left[\alpha_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \rho^{2(n-k)} \Bigg\}_{k=1}^{n-1} \Bigg\},$$

является экстремальным для n-поперечников $d_n(\cdot)$ и $\delta_n(\cdot)$ класса $W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)$ в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$;

2) непрерывный линейный оператор $\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)$, определённый равенством (13), является наилучшим для класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$\mathcal{L}_*^n := \{ f \in \mathscr{B}_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = \overline{0, n-1} \}$$

является экстремальным для гельфандовского n-поперечника;

4) экстремальным для бернштейновского n-поперечника $b_n(\cdot)$ является подпространство

$$\mathcal{P}_n := \operatorname{span}\{1, z, z^2, \ldots, z^n\}.$$

Доказательство. В силу принятых в первом пункте обозначений, имеем

$$\|f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} = M_q(f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f), \rho),$$

пользуясь которым, неравенство (33) запишем в виде

$$M_q(f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f), \rho) \le \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right). \tag{54}$$

Возведя обе части неравенства (54) в степень q $(1 \le q < \infty)$, умножая на $\rho\gamma(\rho)$ и проинтегрировав полученное соотношение по ρ на отрезке $[0, 1]$, получаем

$$\left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q (f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f), \rho) d\rho \right)^{1/q}$$

$$\le \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^{-n}}{n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q},$$

или что то же

$$\|f - \mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} \le \frac{\pi}{4} \frac{R^{-n}}{n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}, \tag{55}$$

причём легко проверить, что неравенство (55) обращается в равенство для ранее рассмотренной нами функции $g(z) = \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{R^{-n}}{n^r} \Phi \left(\dfrac{\pi}{n} \right) z^n \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$.

Это означает, что линейный оператор $\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)$ является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ в метрике пространства $\mathscr{L}_{q,\gamma}$. Учитывая соотношения (12) и неравенство (55), получаем

$$\lambda_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma}) \leq \delta_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma})$$
$$\leq \mathcal{E}(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f))_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}$$
$$= \sup\left\{\|f-\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} : f\in W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)\right\} = \|g\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}$$
$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^{-n}}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}, \tag{56}$$

где под $\lambda_n(\cdot)$ подразумевается любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ или $d^n(\cdot)$. При этом следует учесть, что

$$d_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma}) \leq E(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathcal{L}_n^*)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}$$
$$\leq \mathcal{E}(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f))_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}. \tag{57}$$

Надо также учитывать хорошо известный факт (см., например, [14, гл. II, §3, предложение 3.2]), что если X и Y — линейные нормированные пространства и X является подпространством Y, то

$$d^n(A,X) = d^n(A,Y),$$

где $A\subset X$. В силу этого запишем

$$d^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{L}_{q,\gamma}) = d^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi);\mathscr{B}_{q,\gamma}). \tag{58}$$

Используя определение бернштейновского n-поперечника класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$ докажем, что $(n+1)$-мерная сфера полиномов

$$\sigma_{n+1} := \left\{p_n\in\mathcal{P}_n : \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} = \frac{\pi}{4}\frac{R^{-n}}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}\right\}$$

принадлежит классу $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi)$. Для этого запишем неравенство (38) в виде

$$\rho^n\|p_n\|_{H_q} \leq M_q(p_n,\rho)$$

и возведём обе части полученного неравенства в степень q $(1\leq q<\infty)$, а затем умножим на $\rho\gamma(\rho)$ и, интегрируя по ρ на отрезке $[0,1]$, получаем

$$\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}\cdot\|p_n\|_{H_q} \leq \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}},$$

откуда

$$\|p_n\|_{H_q} \le \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}}. \tag{59}$$

Учитывая (59) из неравенства (35), получаем

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_q} \le R^n n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}}$$

и в силу (40) будем иметь

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} \le R^n n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} \cdot 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*.$$

Отсюда, для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ с учётом ограничения (31), как и в теореме 2, при $h \le \pi/n$ получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt$$

$$\le R^n n^r \cdot \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \frac{2}{h}\int\limits_0^h \sin\frac{nt}{2}dt$$

$$\le \frac{\pi}{nh}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{nh}{2}\right) \le \Phi(h). \tag{60}$$

Если же $h \ge \pi/n$, из (60) и второго неравенства (31) имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_{H_{q,R}} dt$$

$$\le R^n n^r \left(\int\limits_0^1 \gamma^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} \frac{2}{h}\left\{\int\limits_0^{\pi/n} \sin\frac{nt}{2}dt + \int\limits_{\pi/n}^h dt\right\}$$

$$\le \frac{\pi}{nh}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left\{1 + (nh-\pi)/2\right\} \le \Phi(h). \tag{61}$$

Включение $\sigma_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$ следует из неравенств (60) и (61) и в силу определения бернштейновского n-поперечника запишем оценку снизу

$$b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi); \mathscr{B}_{q,\gamma}) \geq b_n(\sigma_{n+1}; \mathscr{B}_{q,\gamma})$$

$$\geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^{-n}}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}. \tag{62}$$

Сопоставляя соотношения (56) – (58) и (62), получаем требуемые равенства (53). При этом, как следует из вышеприведенного доказательства, подпространство $\mathcal{L}_n^*$ является экстремальным для колмогоровского и линейного n-поперечников класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$ в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$, а подпространство $\mathcal{P}_n$ — экстремальное для бернштейновского n-поперечника $b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma})$. Линейный непрерывный оператор $\mathscr{L}_{n-1,r-1}(f)$ будет наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi)$ в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$.

Далее для произвольного элемента $f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi) \cap \mathcal{L}_n^*$ пользуясь неравенствами (18), (19) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}$$

в силу определения гельфандовского n-поперечника запишем

$$d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma})$$

$$\leq \sup\left\{\|f\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi) \cap \mathcal{L}_n^*\right\} = \|g\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^{-n}}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}, \tag{63}$$

где функция g определена в (45). Сопоставляя неравенства (62) и (63), с учётом соотношения (12), заключаем, что подпространство $\mathcal{L}_*^n$ коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского n-поперечника. Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // *Успехи матем. науки.* 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.

2. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов функций // *Матем. заметки.* 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.

3. *Тайков Л. В.* Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // *Analysis of Mathematica.* 1976. V. 2. N 1. P. 78–85.

4. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.

5. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // *Матем. заметки.* 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.

6. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // *Теория отображений и приближение функций* / Наукова думка. Киев. 1983. С. 63–73.

7. *Fisher S.D., Stessin M.I.* The n-width of the unit ball of H^q // *J. Approx. Theory.* 1991. V. 67. N 3. P. 347–356.

8. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // *Матем. заметки.* 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39.

9. *Вакарчук С. Б.* Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // *Матем. заметки.* 2002. Т. 72. № 5. С. 665–669.

10. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространстве Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // *Матем. заметки.* 2009. Т. 85. № 3. С. 323–329.

11. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // *Матем. сборник.* 2010. Т. 201. № 8. С. 3–22.

12. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров. Дж. Дж.* О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2021. Т. 27. № 4. С. 239–254.

13. *Шабозов М. Ш.* О наилучшем совместном приближении функции в пространстве Харди // *Труды ИММ УрО РАН.* 2023. Т. 29. № 4. С. 283–291.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

14. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory* /Berlin; Heidelberg. New York. Tokyo: Springer-Verlag. 1985.

15. *Лангаршоев М. Р.* О наилучшем полиномиальном приближении функций в весовом пространстве Бергмана // *Владикавк. матем. журн.*. 2019. Т. 21. № 1. С. 27–36.

16. *Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения.* М.: Наука. 1987.

17. *Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ. 1976.

18. *Шихалиев Н. И.* Неравенства типа Бернштейна и А.А. Маркова для аналитических функций // *Докл. АН АзССР.* 1975. Т. 31. № 8. С. 9–14.

References

1. *Tikhomirov V. M.* Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations // *Russian Math. Surveys.* 1960. V. 15. N. 3. P. 81–120.

2. *Taikov L. V.* The approximation in the mean of certain classes of periodic functions // *Math. Notes.* 1967. V. 1. P. 155–162.

3. *Taikov L. V.* Some exact inequalities in the theory of approximation of functions // *Analysis of Mathematica.* 1976. V. 2. N. 1. P. 78–85.

4. *Taikov L. V.* Diameters of certain classes of analytic functions // *Math. Notes.* 1977. V. 22. N. 2. C. 650–656.

5. *Ainulloev N., Taikov L. V.* Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc // *Math. Notes.* 1986. V. 40. N. 3. P. 341–351.

6. *Dveirin M. Z., Chebanenko I. V.* On Polynomial Approximation in Banach Spaces of Analytic Functions // *Theory of Mappings and Function Approximation* / Naukova dumka. Kiev. 1983. P. 63–73.

7. *Fisher S.D., Stessin M.I.* The n-width of the unit ball of H^q // *J. Approx. Theory.* 1991. V. 67. N. 3. P. 347–356.

8. *Vakarchuk S. B.* Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk // *Math. Notes.* 1995. V. 57. N. 1. P. 21–27.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

9. *Vakarchuk S. B.* Exact Values of Widths of Classes of Analytic Functions on the Disk and Best Linear Approximation Methods // *Math. Notes.* 2002. V. 72. N. 5. P. 615–619.

10. *Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I.* Best Linear Approximation Methods for Functions of Taikov Classes in the Hardy spaces $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // *Math. Notes.* 2009. V. 85. N. 3. C. 322–327.

11. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh.* The widths of classes of analytic functions in a disc // *Sb. Math.*. 2010. V. 201. N. 8. P. 1091–1110.

12. *Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., Zargarov J. J.* On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2021. V. 27. N. 4. P. 239–254.

13. *Shabozov M. Sh.* On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2023. V. 29. N. 4. P. 283–291.

14. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory* / Berlin; Heidelberg. New York. Tokyo: Springer-Verlag. 1985.

15. *Langarshoev M. R.* On the best polynomial approximation of functions in the weight Bergman space // *Vladikavkaz. Mat. Zh.* 2019. V. 21. N. 1. P. 27–36.

16. *Korneichuk N.P. Exact Constants in the Theory of Approximation.* M.: Nauka. 1987.

17. *Tikhomirov V.M. Some Questions in the Theory of Approximation.* M.: Izdatelstvo MGU. 1976.

18. *Shikhaliev N.I.* Bernstein-Type and A.A. Markov Inequalities for Analytic Functions // *Dokl. AN AzSSR.* 1975. V. 31. N. 8. P. 9–14.

Информация об авторе

Мирганд Шабозович Шабозов, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN-код: 9315-7401, AuthorID: 743643

Scopus Author ID 55977604300

Адолат Аъзамовна Шабозова, кандидат физико-математических наук, доцент

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 115-140

Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 115-140

SPIN-код: 1684-5182, AuthorID: 1091307
Scopus Author ID 55836657700

Author Information

Mirgand Sh. Shabozov, Doctor of Mathematics, Professor
SPIN-код: 9315-7401, AuthorID: 743643
Scopus Author ID 55977604300
Adolat A. Shabozova, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN-код: 1684-5182, AuthorID: 1091307
Scopus Author ID 55836657700

Статья поступила в редакцию 11.07.2024;
одобрена после рецензирования 11.12.2024; принята к публикации 13.12.2024

The article was submitted 11.07.2024;
approved after reviewing 11.12.2024; accepted for publication 13.12.2024