Научная статья
УДК 519.651
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-81-92

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

Александр Иванович Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

zadorin@ofim.oscsbras.ru;
https://orcid.org/0000-0002-2577-1181

Аннотация

Рассматриваются вопросы приближения функции двух переменных с большими градиентами в окрестности заданной точки на основе формулы Тейлора. Если производные функции не ограничены некоторой постоянной, погрешность такого приближения может быть значительной. Предполагается, что функция может быть представлена в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих. В частности, такое представление справедливо для решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи. Погранслойная составляющая рассматривается как функция общего вида, известна с точностью до множителя и отвечает за большие градиенты функции.

Для того, чтобы повысить точность приближения функции на основе применения формулы Тейлора, предлагается строить формулы, точные на погранслойной составляющей функции. Доказано, что тогда оценка погрешности не зависит от производных погранслойной составляющей.

Ключевые слова и фразы

функция двух переменных, формула Тейлора, большие градиенты, формула приближения с учетом погранслойной составляющей, оценка погрешности.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0016).

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 81-92
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 81-92

Для цитирования

Задорин А. И. Применение формулы Тейлора для приближения многочленами функции двух переменных с большими градиентами // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 81-92. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-81-92

APPLICATION OF TAYLOR'S FORMULA TO POLYNOMIAL APPROXIMATION OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES WITH LARGE GRADIENTS

Alexander I. Zadorin

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

zadorin@ofim.oscsbras.ru;
https://orcid.org/0000-0002-2577-1181

Abstract

The problem of approximating a function of two variables with large gradients by polynomials based on the Taylor formula is investigated. It is assumed that the decomposition of the function in the form of a sum of regular and boundary layer components is valid. The boundary layer component is known with an accuracy of up to a factor and is responsible for large gradients of the function. Such a decomposition is valid for the solution of singularly perturbed elliptic problem. The problem is that approximating such a function by polynomials based on the Taylor formula can lead to significant errors due to the presence of the boundary layer component. A formula for approximating a function is developed, using the Taylor formula and, by construction, being exact on the boundary layer component of the given function of two variables. It is proved that the error estimate of the constructed formula depends on the partial derivatives of the regular component and does not depend on the derivatives of the boundary layer component, which significantly increases the accuracy of approximating the function by polynomials.

Keywords

function of two variables, large gradients, Taylor formula, polynomial approximation formula taking into account the boundary layer component, error estimate.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 81-92
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 81-92

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignments from the Institute of Metematics named after. S.L. Sobolev SB RAS (project No. FWNF-2022-0016)

For citation

Zadorin A. I. Application of Taylor's formula to polynomial approximation of a function of two variables with large gradients // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 81-92. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-81-92

§ 1. Введение и постановка задачи

Формула Тейлора для приближения функции в окрестности заданной точки многочленами хорошо известна, например, приведена в [1]. Если функция приближается многочленом степени k и $(k+1)$-ая производная функции не является равномерно ограниченной, то погрешность приближения по формуле Тейлора может быть значительной.

В работе будем предполагать, что для функции справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной составляющей с ограниченными производными до некоторого порядка и погранслойной составляющей, имеющей большие градиенты и известной с точностью до множителя. Такая декомпозиция функции разрабатывалась для решения сингулярно возмущенных задач в [2]–[4] и применялась для построения и анализа разностных схем, интерполяционных формул [5], формул численного дифференцирования [6], [7].

Если к функции с такой декомпозицией применить формулу Тейлора для приближения многочленами, то погрешность будет значительной из-за наличия у функции погранслойной составляющей.

В [8] предложено строить формулы приближения функции многочленами с применением формулы Тейлора таким образом, чтобы формулы были точными на погранслойной составляющей функции. Рассмотрены случаи функции одной и двух переменных. Для функции одной переменной разработана формула приближения многочленом произвольно задаваемой степени в окрестности заданной точки. В случае функции двух переменных с погранслойной составляющей по каждой переменной построены формулы приближения многочленами нулевой и первой степени. Получены оценки погрешности, не зависящие от погранслойных составляющих и их производных. Это существенно повышает точность приближения, так как за основной рост функции отвечают погранслойные составляющие.

В предлагаемой работе исследуем подход из [8] для приближения функции двух переменных с погранслойной составляющей многочленами произвольно задаваемой степени в окрестности заданной точки.

Обозначения. Под C и C_j будем подразумевать ограниченные положительные постоянные, не зависящие от h, погранслойных составляющих и их производных. В случае, когда погранслойные составляющие отвечают за рост функции в регулярном пограничном слое [2], эти постоянные не зависят от положительного малого параметра ε. Будем ограничивать различные величины одной постоянной C_j, если это понятно по тексту.

§ 2. Случай функции одной переменной

Пусть $u(x)$ — достаточно гладкая функция на интервале $[0,1]$. Формула приближения функции многочленами на основе разложения в ряд Тейлора имеет вид [1]:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_k(u,x), \tag{1}$$

где $x_0, x \in [0,1]$, k — степень многочлена, $R_k(u,x)$ — остаточный член, для которого справедлива следующая оценка [1]:

$$|R_k(u,x)| \leq \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \max_{s\in[x_0,x]} \left|u^{(k+1)}(s)\right|, \tag{2}$$

где $h = |x-x_0|$. Предполагаем, что $x > x_0$. В случае $x < x_0$ интервал $[x_0,x]$ заменяется на интервал $[x,x_0]$.

Согласно (2), для некоторой постоянной C $|R_k(u,x)| \leq Ch^{k+1}$, если производная $u^{(k+1)}(x)$ равномерно ограничена. Однако, погрешность может быть значительной, если эта производная не является равномерно ограниченной.

Например, рассмотрим формулу (1) при $k=1$:

$$u(x) \approx u(x_0) + (x-x_0)u'(x_0). \tag{3}$$

Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, где $\varepsilon \in (0,1], x \in [0,1]$. Такая функция соответствует погранслойной составляющей решения сингулярно возмущенной задачи [2], при малых значениях параметра ε имеет большие градиенты.

При задании $x_0 = 0$, $x = \varepsilon$ имеем

$$R_1(u,x) = u(\varepsilon) - u(0) - \varepsilon u'(0) = e^{-1}.$$

Получаем, что формула (3) имеет погрешность порядка $O(1)$, если $\varepsilon = h$. Так как параметр ε может принимать любое значение из интервала $(0,1]$, то необходимо, чтобы оценка погрешности была равномерной по параметру ε. Такое же требование предъявляется к разностным схемам при численном решении сингулярно возмущенных задач [2].

Таким образом, применение формулы Тейлора для приближения функций с большими градиентами многочленами может приводить к существенным погрешностям.

Рассмотрим вопрос повышения точности приближения функции многочленами в случае, когда у функции с точностью до множителя выделена составляющая, отвечающая за большие градиенты функции.

Итак, пусть для достаточно гладкой функции $u(x)$ справедлива декомпозиция:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \ x \in [0,1], \tag{4}$$

где $p(x)$ — регулярная составляющая с ограниченными производными до определенного порядка, $\Phi(x)$ — погранслойная составляющая, которая является функцией общего вида и отвечает за большие градиенты функции $u(x)$. Функция $\Phi(x)$ предполагается известной, $p(x)$ и γ не заданы, коэффициент γ ограничен.

Остановимся на примере декомпозиции (4). Для решения сингулярно возмущенной краевой задачи в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, согласно [3], справедлива декомпозиция (4) при задании

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}, \ \alpha > 0, x \in [0,1], \varepsilon \in (0,1]. \tag{5}$$

В соответствии с [3] $|p'(x)| \le C$ для некоторой постоянной C. Если функция $\Phi(x)$ соответствует (5), то $|\Phi^{(n)}(x)| \le \alpha^n/\varepsilon^n$. В этом случае, согласно оценке (2), погрешность $|R_k(u,x)|$ может быть порядка $O(1)$ при малых значениях ε.

В [8] для приближения функции $u(x)$, обладающей декомпозицией (4), формула Тейлора применена таким образом, чтобы приближение было точным на погранслойной составляющей $\gamma\Phi(x)$.

С учетом функции $\Phi(x)$, заданной в декомпозиции (4), зададим приближение для $u(x)$ выражением:

$$u(x) \approx G_k(u,x), \quad G_k(u,x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \Big[\Phi(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\Phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j\Big] \frac{u^{(k+1)}(x_0)}{\Phi^{(k+1)}(x_0)}, \tag{6}$$

предполагается, что $\Phi^{(k+1)}(x_0) \ne 0$. Из (6) следует, что $G_k(\gamma\Phi, x) = \gamma\Phi(x)$.

В [8] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление (4),* $\Phi^{(k+1)}(x_0) \neq 0$ *и для некоторой постоянной* C_1 *справедлива следующая оценка:*

$$\max_{s\in[x_0,x]} \left|\Phi^{(k+1)}(s)\right| \le C_1 \left|\Phi^{(k+1)}(x_0)\right|.$$

Тогда для некоторой постоянной C_2 *справедлива оценка погрешности:*

$$\left|u(x) - G_k(u,x)\right| \le C_2 h^{k+1} \max_{s\in[x_0,x]} \left|p^{(k+1)}(s)\right|, \tag{7}$$

где $G_k(u,x)$ *соответствует (6).*

Отметим, что в соответствии с (7) оценка погрешности формулы (6) зависит только от производных регулярной составляющей $p(x)$. Это существенно повышает точность приближения в сравнении с формулой (1), если функция $\Phi(x)$ имеет большие градиенты.

Замечание. Построенная формула (6) может быть применена для численного решения сингулярно возмущенных диффереціальных уравнений с запаздывающим аргументом. В ряде работ, например в [9], для избавления в дифференциальном уравнении от слагаемого $u(x-\delta)$ с запаздывающим аргументом, делается замена по формуле Тейлора $u(x-\delta) \approx u(x) - \delta u'(x)$, где δ – запаздывание, $\delta > 0$. В случае сингулярно возмущенной задачи, в соответствии с (5), справедлива оценка $|u''(x)| \le C/\varepsilon^2$. Следовательно, погрешность при применении формулы Тейлора порядка $O(\delta^2/\varepsilon^2)$, где $\varepsilon \in (0,1]$. При малых значениях ε погрешность значительна, поэтому решения исходной задачи и преобразованной задачи, в которой уже нет запаздывающего аргумента, могут отличаться на величину порядка $O(1)$. Для решения сингулярно возмущенной задачи справедлива декомпозиция (4), поэтому в соответствии с леммой 1 и оценкой (7) можно применить формулу (6) для перехода к задаче без запаздывающего аргумента.

§ 3. Приближение функции двух переменных с погранслойной составляющей

Пусть достаточно гладкая функция $u(x,y)$ содержит погранслойную составляющую с большими градиентами, известную с точностью до множителя γ :

$$u(x,y) = p(x,y) + \gamma\Psi(x,y), (x,y) \in [0,1]^2, \tag{8}$$

где $p(x,y)$ — регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, производные функции $\Psi(x,y)$ не являются равномерно ограниченными. Предполагаем, что функция $\Psi(x,y)$ известна, $p(x,y)$ и γ не заданы.

В частности, декомпозиция (8) справедлива для решения эллиптической сингулярно возмущенной задачи [4].

Остановимся на формуле Тейлора для приближения функции $u(x,y)$ многочленами. Формула Тейлора в соответствии с [1] имеет вид:

$$u(x,y) = G_k(u,x,y) + R_k(u,x,y), \tag{9}$$

где при $(x_0,y_0),(x,y) \in [0,1]^2$

$$G_k(u,x,y) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j u(x_0,y_0), \tag{10}$$

остаточный член имеет вид:

$$R_k(u,x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{k+1} u(s_1,s_2) \tag{11}$$

для некоторых $s_1 \in [x_0,x], s_2 \in [y_0,y]$. Здесь применяется обозначение

$$\Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{k+1} = (x-x_0)^{k+1}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}.$$

Предполагаем, что $x > x_0, y > y_0$, другие случаи рассматриваются аналогично. Зададим

$$h = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \tag{12}$$

Оценим остаточный член $R_k(u,x,y)$ из (11), применяя формулу бинома Ньютона:

$$R_k(u,x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\Big)^j \Big((y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{k+1-j} u(s_1,s_2), \tag{13}$$

где

$$C_{k+1}^j = \frac{(k+1)!}{(k+1-j)!\,j!}, \ \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j = 2^{k+1}.$$

Учитывая (12), из (13) получаем

$$|R_k(u,x,y)| \le \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\Big|\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} u(s_1,s_2)\Big|. \tag{14}$$

Если частные производные функции $u(x,y)$ до порядка $(k+1)$ ограничены, то из (14) следует, что $|R_k(u,x,y)| \le Ch^{k+1}$.

Предполагаем, что для функции $u(x, y)$ справедлива декомпозиция (8), поэтому в соответствии с оценкой (14), из-за наличия погранслойной составляющей $\gamma\Psi(x, y)$, погрешность известной формулы (10) может быть значительной. В одномерном случае это показано в случае формулы (3).

Зададим формулу для приближения функции $u(x, y)$ многочленами на основе того, чтобы формула была точной на составляющей $\gamma\Psi(x, y)$.

Пусть $(a, b) \in [0, 1]^2$. Задание этих параметров обсудим ниже. Учитывая декомпозицию (8), для приближения функции $u(x, y)$ зададим формулу:

$$u(x,y) \approx \tilde{G}_k(u,x,y) = G_k(u,x,y) + \Big[\Psi(x,y) - G_k(\Psi,x,y)\Big]$$

$$\times \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} u(a,b) \Big/ \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} \Psi(a,b), \tag{15}$$

где $G_k(u, x, y)$ соответствует формуле (10). Предполагаем, что знаменатель в (15) не равен нулю.

Из (10), (15) получаем

$$\tilde{G}_k(\gamma\Psi, x, y) = \gamma\Psi(x, y). \tag{16}$$

Из (16) следует, что построенная формула (15) является точной на составляющей $\gamma\Psi(x, y)$, отвечающей за большие градиенты функции $u(x, y)$.

Оценим погрешность формулы (15).

Теорема 1. *Пусть в (15) a и b заданы таким образом, что для некоторой постоянной C_1 при всех $s_1, s_2 \in [0, 1]$ справедлива оценка:*

$$\Big|\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} \Psi(s_1,s_2)\Big| \le C_1 \Big|\sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} \Psi(a,b)\Big|. \tag{17}$$

Тогда для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка погрешности формулы (15):

$$|u(x,y) - \tilde{G}_k(u,x,y)| \le C_2 \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \max_{s_1,s_2} \Big|\sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} p(s_1,s_2)\Big|, \tag{18}$$

где h соответствует (12) .

Доказательство. Учитывая (8)–(10), (16), из (15) получаем

$$u(x,y) - \tilde{G}_k(u,x,y) = p(x,y) - \tilde{G}_k(p,x,y)$$

$$= \Big(p(x,y) - G_k(p,x,y)\Big) - \bigg(\Big(\Psi(x,y) - G_k(\Psi,x,y)\Big) \Big/ \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} \Psi(a,b)\bigg)$$

$$\times \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} p(a, b). \tag{19}$$

В соответствии с (9) и оценкой (14) имеем

$$|\Psi(x, y) - G_k(\Psi, x, y)| \le \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \Big| \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}} \Psi(s_1, s_2) \Big|. \tag{20}$$

Учитывая оценку (20) и аналогичную оценку для функции $p(x, y)$, используя условие (17), из (19) для некоторой постоянной C_2 получаем требуемую оценку (18). Теорема доказана.

Полученная оценка погрешности (18) для формулы (15) зависит от частных производных регулярной составляющей $p(x, y)$ и не зависит от производных погранслойной составляющей $\gamma\Psi(x, y)$. Применение формулы (15) существенно повышает точность приближения в сравнении с применением известной формулы (10), если для функции $u(x, y)$ справедлива декомпозиция (8).

Пример функции при наличии пограничных слоев. Остановимся на применимости теоремы 1 в случае функции $u(x, y)$, соответствующей решению эллиптической задачи при наличии экспоненциальных пограничных слоев [2], [4].

Зададим функцию $u(x, y)$ в соответствии с декомпозицией (8), когда

$$\Psi(x, y) = g(y)e^{-\alpha x/\varepsilon} + r(x)e^{-\beta y/\varepsilon},\ (x, y) \in [0, 1]^2, \tag{21}$$

где $\alpha > 0, \beta > 0, \varepsilon \in (0, 1]$. Функции $e^{-\alpha x/\varepsilon}, e^{-\beta y/\varepsilon}$ при малых значениях параметра ε задают большие градиенты функции $u(x, y)$ в погранслойных областях у границ $x = 0$ и $y = 0$ соответственно.

Предполагаем, что функции $r(x), g(y)$ являются достаточно гладкими и имеют ограниченные производные, для некоторой постоянной C_0

$$|r^{(j)}(x)| \le C_0, |g^{(j)}(y)| \le C_0,\ j = 0, 1, \ldots, k+1,\ x, y \in [0, 1].$$

В соответствии с [4], декомпозиция вида (8), (21) справедлива для решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(y)u_y - c(x, y)u = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2,$$

$$u(x, y) = s(x, y),\ (x, y) \in \Gamma,$$

где Γ — граница области Ω, функции a_1, a_2, c, f, s достаточно гладкие,

$$a_1(x) \ge \beta_1 > 0, \quad a_2(y) \ge \beta_2 > 0, \quad c(x, y) \ge 0,\ \varepsilon \in (0, 1].$$

Здесь β_1, β_2 не зависят от ε. В этом случае $\alpha = a_1(0), \beta = a_2(0)$.

Если $\Psi(x, y)$ соответствует (21), то при задании $a = 0, b = 0$ условие (17) выполнено для некоторой постоянной C_1. В соответствии с теоремой 1 справедлива оценка погрешности (18).

§ 4. Заключение

Исследован вопрос приближения функции двух переменных с большими градиентами на основе применения формулы Тейлора. Предполагается, что для исходной функции справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих. Погранслойная составляющая известна с точностью до множителя и отвечает за большие градиенты функции. Такая декомпозиция, в частности, справедлива для решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи. Проблема в том, что приближение такой функции многочленами на основе применения формулы Тейлора может приводить к существенным погрешностям из-за наличия погранслойной составляющей. Разработана формула, использующая формулу Тейлора и по построению являющаяся точной на погранслойной составляющей исходной функции двух переменных. Доказано, что оценка погрешности построенной формулы зависит от частных производных регулярной составляющей и не зависит от производных погранслойной составляющей, что существенно повышает точность приближения функции на основе формулы Тейлора.

Список литературы

1. *Зорич В. А. Математический анализ.* Часть I. М.: МЦНМО, 2019.

2. *Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

3. *Kellogg R. B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // *Math. Comput.* 1978. V. 32. P. 1025–1039.

4. *Roos H. G., Stynes M., and Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow problems.* Berlin: Springer, 2008.

5. *Задорин А. И., Задорин Н. А.* Неполиномиальная интерполяция функций с большими градиентами и ее применение // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2021. Т. 61, №2. С. 179–188.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 81-92
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 81-92

6. *Задорин А. И.* Формулы численного дифференцирования функций с большими градиентами // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2023. Т. 26, № 1. С. 17–26.

7. *Zadorin A.I.* Formulas for Numerical Differentiation on a Uniform Mesh in the Presence of a Boundary Layer // *Comput. Math. Math. Phys.* 2024. V 64, N 6. P. 1167–1175.

8. *Zadorin A. I.* Application of a Taylor series to approximate a function with large gradients // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2023. V. 20, N 4. P. 1420–1429.

9. *Ranjan R., Prasad H. S.* A novel approach for the numerical approximation to the solution of singularly perturbed differential-difference equations with small shifts // *J. of Applied Mathematics and Computing.* 2021. V. 65. P. 403–427.

References

1. *Zorich V. A. Mathematical analysis.* Berlin: Springer, 2015.

2. *Shishkin G. I. Mesh approximations of singularly perturbed elliptic and parabolic equations.* Yekaterinburg: Ural Otd. Ross. Akad. Nauk, 1992 [in Russian].

3. *Kellogg R. B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // *Math. Comput.* 1978. V. 32. P. 1025–1039.

4. *Roos H. G., Stynes M., and Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow problems.* Berlin: Springer, 2008.

5. *Zadorin A. I., Zadorin N. A.* Non-Polynomial Interpolation of Functions with Large Gradients and Its Application // *Comput. Math. Math. Phys.* 2021. V. 61, N 2. P. 167–176.

6. *Zadorin A. I.* Formulas for Numerical Differentiation of Functions with Large Gradients // *Numer. Anal. Appl.* 2023. V. 16 N 1. P. 14–21.

7. *Zadorin A.I.* Formulas for Numerical Differentiation on a Uniform Mesh in the Presence of a Boundary Layer // *Comput. Math. Math. Phys.* 2024. V 64, N 6. P. 1167–1175.

8. *Zadorin A. I.* Application of a Taylor series to approximate a function with large gradients // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2023. V. 20, N 4. P. 1420–1429.

9. *Ranjan R., Prasad H. S.* A novel approach for the numerical approximation to the solution of singularly perturbed differential-difference equations with small shifts // *J. of Applied Mathematics and Computing.* 2021. V. 65. P. 403–427.

Информация об авторе

Александр Иванович Задорин, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN-код: 6349-0734, AuthorID: 2054

Scopus Author ID 23977133800

Author Information

Alexander I. Zadorin, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN-код: 6349-0734, AuthorID: 2054

Scopus Author ID 23977133800

Статья поступила в редакцию 24.08.2024; одобрена после рецензирования 22.10.2024; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 24.08.2024; approved after reviewing 22.10.2024; accepted for publication 30.10.2024