Научная статья
УДК 519.83
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-26-41

О ЯДРЕ РАСШИРЕНИЯ ОБЭНА ПОЧТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ИГРЫ

Валерий Александрович Васильев

Учреждение Российской академии наук
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия

vasilev@math.nsc.ru;ORCID: 0000-0002-1536-0610

Аннотация

Работа посвящена анализу взаимосвязи между вектором Шепли и ядром известного расширения Обэна почти положительных кооперативных игр. Последние, с точностью до аддитивной составляющей, характеризуются неотрицательностью своих дивидендов Харшаньи. Поэтому, будучи выпуклыми, почти положительные игры содержат вектора Шепли внутри своих ядер. В работе доказывается, что для расширения Обэна таких игр имеет место ещё более сильная корреляция: их ядра полностью исчерпываются соответствующими векторами Шепли. Используемая аргументация опирается на отмеченную Ж.-П.Обэном возможность описания ядер некоторых классов нечётких кооперативных игр в терминах супердифференциалов их характеристических функций.

Ключевые слова и фразы

почти положительная игра, вектор Шепли, нечёткая игра, расширение Обэна, ядро, супердифференциал нечёткой игры.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН (номер темы FWNF-2022-0019)

Для цитирования

Васильев В. А. О ядре расширения Обэна почти положительной игры // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 26-41. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-26-41

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 26-41
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 26-41

ON THE CORE OF AUBIN EXTENSION OF ALMOST POSITIVE GAME

Valery A. Vasil'ev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
vasilev@math.nsc.ru

Abstract

The aim of the paper is to study the core of the famous Aubin extension for almost positive games. These games are characterized by nonnegativity of the Harsanyi dividends of their non-singleton coalitions. So, being convex, these games have their Shapley values inside the classical core. We prove that for the Aubin extension of these games much more stronger result holds: the core of this extension of any almost positive game consists of its Shapley value only. The approach developed is based, mostly, on close relation between the cores and super-differentials of fuzzy cooperative games, mentioned by J. -P. Aubin.

Keywords

Almost positive game, Shapley value, fuzzy game, Aubin extension, core, super-differential of a fuzzy game

Funding

The work was supported by the Program of Basic Scientific Research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (grant No. FWNF-2022-0019)

For citation

Vasil'ev V. A. On the Core of Aubin Extension of Almost Positive Game // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 26-41. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-26-41

§ 1. Введение и постановка задачи

Один из наиболее важных результатов классической кооперативной теории игр состоит в доказательстве коалиционной стабильности вектора Шепли в любой конечной выпуклой игре. Основная аргументация базируется на конструктивном описании крайних точек ядер этих игр, полученном в известной публикации [1]. Задача настоящей работы заключается в доказательстве аналога вышеуказанного результата в случае усиления блокирующих возможностей участников с помощью так называемых нечётких коалиций. Как и в предыдущих работах [2, 3], мы используем методы выпуклого анализа [4] и линейного программирования [5, 6], доказавшие свою эффективность в сравнительном анализе принципов справедливости (вектор Шепли и его аналоги) и коалиционной стабильности (ядро), имеющих ключевое значение в классических кооперативных играх. Подчеркнём также, что в отличие от статьи [3], где даётся лишь общая схема, опирающаяся на довольно продвинутые факты субдифференциального исчисления, предлагаемая работа содержит новое и подробное доказательство основного результата, использующее в значительной мере лишь сравнительно элементарные утверждения типа теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом. При этом, как нам представляется, вся необходимая аргументация приводится в полном объёме и с надлежащей детализацией.

Как уже отмечалось, классические выпуклые игры содержат вектора Шепли внутри своих ядер. Ниже устанавливается, что в случае расширений Обэна почти положительных игр имеет место значительно более сильная корреляция. Именно, оказывается что ядро каждого такого расширения содержит единственный элемент — вектор Шепли соответствующей стандартной игры. При этом, согласно вышесказанному, значительная часть обоснования этого утверждения базируется на хорошо известном неравенстве среднего арифметического и среднего геометрического. В целом же рассмотрение опирается на упоминавшуюся взаимосвязь ядер и супердифференциалов некоторых классов нечётких кооперативных игр.

§ 2. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Приведем сначала некоторые основные понятия теории игр, используемые в дальнейшем. Согласно терминологии, используемой в [7], пара $\Gamma = (N, v)$, где $N = \{1, \dots, n\}$, а v — вещественнозначная функция на семействе 2^N всех подмножеств множества N, называется *кооперативной игрой n лиц с побочными платежами* (кратко: кооперативной игрой). Элементы $i \in N$ называются игроками, подмножества $S \subseteq N$ — их коалициями, а значения $v(S)$ функции v (называемой характеристической функцией игры Γ) трактуются как максимальные гарантированные выигрыши, достижимые кооперацией всех игроков i, объединившихся в коалицию S (по определению $v(\emptyset) = 0$). Как обычно, в дальнейшем кооперативная игра $\Gamma = (N, v)$ отождествляется с её (вообще-говоря, неаддитивной) характеристической функцией v.

Положим $\sigma_0 = \{S \subseteq N \mid S \neq \emptyset\}$. Простейшие примеры кооперативных игр n лиц с побочными платежами дают так называемые *игры единогласия* *(unanimity games)* $u^S : 2^N \to \mathbb{R}$, $S \in \sigma_0$, определяемые соотношениями

$$u^S(T) = \begin{cases} 1, & S \subseteq T, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим $V(N)$ семейство кооперативных игр с множеством игроков N. Хорошо известно [8], что игры единогласия $\{u^S\}_{S\in\sigma_0}$ образуют базис векторного пространства $V(N)$.

Определение 2.1. Коэффициенты v_S разложения $v = \sum_{S\in\sigma_0} v_S u^S$ элемента $v \in V(N)$ по вышеуказанному базису называются *дивидендами Харшаньи* соответствующих коалиций игры v (см., например, [9]).

Положим $\sigma_i = \{S \in \sigma_0 \mid i \in S\}, \quad i \in N$. Одним из важнейших кооперативных решений является так называемый *вектор Шепли* (в литературе используется также синоним *значение Шепли*). Последний определяется следующим образом [8].

Определение 2.2. *Вектор Шепли* $\Phi(v) = (\Phi(v)_1, \ldots, \Phi(v)_n)$ задаётся формулой

$$\Phi(v)_i = \sum_{T\in\sigma_i} \frac{v_T}{|T|}, \quad i \in N$$

(выше, как обычно, $|T|$ обозначает число элементов множества T).

Замечание 2.1. Полезная вероятностная интерпретация вектора Шепли имеется в основополагающей работе [10] (см. также [8] и [11]): "Игрок $i \in N$ соглашается участвовать в "большой коалиции"N игры v, формируемой следующим образом. 1. Начиная с i, процесс образования N состоит в последовательном добавлении игроков вплоть до включения их всех в формируемую "большую коалицию"N. 2. Порядок, в котором игроки присоединяются к уже вступившим, является случайным и гарантирует равную вероятность любого из $n!$ вариантов построения N. 3. Каждому из игроков при его объединении с уже вступившими обещано получение маргинального вклада (разницы между тем, что, согласно функции v, получает коалиция, образовавшаяся с его вступлением, и тем, что имело объединение предшествующих участников). После своего образования коалиция N играет "эффективно т.е. таким образом, чтобы получить максимальный гарантированный выигрыш $v(N)$, достаточный для выполнения данных обещаний."Можно показать, что выигрыши игроков в приведённой рандомизационной схеме, исчисляемые как соответствующие математические ожидания, совпадают с их компонентами вектора Шепли (см., например, [8]). Следовательно, вектор Шепли удовлетворяет так называемому "условию справедливости": если разности $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ и

$v(S \cup \{j\}) - v(S)$ равны между собой для любых коалиций S, не содержащих игроков i и j, то $\Phi(v)_i = \Phi(v)_j$.

Еще одно из оптимальных решений кооперативной теории игр — (классическое) ядро, формализующее идею коалиционной стабильности (см., например, [8]).

Определение 2.3. (Классическое) *ядро* $C(v)$ кооперативной игры v из $V(N)$ определяется формулой

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ S \in \sigma_0\}$$

(здесь и далее мы используем стандартное сокращение: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ для любого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ и множества $S \subseteq N$).

Замечание 2.2. Зафиксируем какую-либо игру $v \in V(N)$. Согласно стандартной теоретико-игровой терминологии, вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащий $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяющий равенству $x(N) = v(N)$ называется распределением выигрышей (кратко: выигрышем) игры v. Слегка модифицируя определение доминирования, приводимое в [11] будем говорить, что коалиция $S \in \sigma_0$ блокирует выигрыш x игры v, если существует вектор $y = (y_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S$ такой, что

$(a1)$ $y_i > x_i,\ i \in S$,

$(a2)$ $y(S) \leq v(S)$.

Легко убедиться, что ядро $C(v)$ состоит в точности из таких выигрышей игры v, которые не могут блокироваться никакой коалицией $S \in \sigma_0$.

Для полноты изложения напомним также определение нечёткой кооперативной игры с побочными платежами (кратко: нечёткой игры) и ее ядра. Обозначим I^N единичный гиперкуб, определяемый формулой

$$I^N = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^N \mid \tau_i \in [0,1],\ i \in N\}.$$

Семейство $\sigma_F = I^N \setminus \{0\}$ называется совокупностью *нечётких коалиций*, определенных на множестве N. Как обычно (см., например, [12], [13]), каждая компонента τ_i нечёткой коалиции $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$ трактуется как уровень участия игрока i в большой коалиции N. Напомним также, что всякая стандартная коалиция $S \subseteq N$ отождествляется с соответствующей индикаторной функцией $e_S \in I^N$, определяемой формулой

$$(e_S)_i = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Далее, для каждой нечёткой коалиции $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$ обозначим через $N(\tau)$ её носитель

$$N(\tau) = \{i \in N \mid \tau_i > 0\}.$$

Как обычно, для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subseteq N$ через $x_S \in \mathbb{R}^S$ будем обозначать сужение x на множество $S : (x_S)_i = x_i, \quad i \in S$.

Используя введённые обозначения, опишем рассматриваемый в дальнейшем класс нечётких кооперативных игр.

Определение 2.4. *Нечёткая TU-кооперативная игра* (кратко: нечёткая игра), определяемая характеристической функцией $v : \sigma_F \to \mathbb{R}$, представляет собой многозначное отображение $\tau \mapsto G_v(\tau)$, сопоставляющее каждой нечёткой коалиции $\tau \in \sigma_F$ совокупность распределений выигрышей ее участников, задаваемую формулой

$$G_v(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^{N(\tau)} \mid \sum_{i \in N(\tau)} \tau_i x_i \leq v(\tau)\}.$$

Согласно данному определению и терминологии, используемой в работах [11, 12, 13] и [14], нечёткая кооперативная игра v может трактоваться как *нечёткая NTU-игра* специального типа, когда множество достижимых выигрышей нечёткой коалиции τ является полупространством

$$\{x \in \mathbb{R}^{N(\tau)} \mid \tau_{N(\tau)} \cdot x \leq v(\tau)\}$$

с нормалью $\tau_{N(\tau)}$ (выше $x \cdot y$, как обычно, обозначает скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m : x \cdot y = \sum_{i=1}^m x_i y_i$).

Как и в случае с классическими кооперативными играми, нечёткие игры отождествляются в дальнейшем с их характеристическими функциями $v : \sigma_F \to \mathbb{R}$.

Замечание 2.3. Является ли рассматриваемая игра v обычной или нечёткой, однозначно определяется рассматриваемым контекстом.

Среди наиболее интересных примеров нечётких TU-кооперативных игр следует отметить так называемые расширения Обэна обычных игр из $V(N)$. Такие расширения, являющиеся ключевыми объектами настоящей работы, определяются следующим образом.

Определение 2.5. Для каждой игры $v \in V(N)$ ее *расширением Обэна* называется нечёткая игра v_{Au}, определяемая формулой

$$v_{Au}(\tau) = \sum_{S \in \sigma_0} v_S \prod_{i \in S} \tau_i^{\frac{1}{|S|}}, \quad \tau \in \sigma_F.$$

Легко проверить, что функция v_{Au} действительно является расширением обыкновенной игры v на множество σ_F, поскольку $v_{Au}(e_S) = v(S)$ для каждой коалиции $S \in \sigma_0$.

Напомним (см. [4],[14]) ещё два основных понятия работы — блокирование в нечёткой игре и определение ее ядра.

Определение 2.6. Нечёткая коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *блокирует* распределение выигрышей (кратко: выигрыш) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_v(e_N)$ нечёткой игры v, если существует вектор $y = (y_i)_{i \in N(\tau)}$ из $\mathbb{R}^{N(\tau)}$ такой, что

$(b1)$ $y_i > x_i, \quad i \in N(\tau)$;

$(b2)$ $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \le v(\tau)$.

Определение 2.7. *Ядром* $C(v)$ нечёткой TU-кооперативной игры v называется множество всех выигрышей $x \in G_v(e_N)$, которые не блокируются никакой коалицией $\tau \in \sigma_F$.

Нетрудно проверить, что ядро $C(v)$ нечёткой игры v характеризуется в терминах линейных неравенств совершенно аналогично тому, как это имеет место для обычных игр из $V(N)$. Действительно, справедливо следующее описание $C(v)$, когда v является нечёткой игрой.

Предложение 2.1. *Ядро $C(v)$ нечёткой кооперативной игры v имеет вид*

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \big| x \cdot e_N = v(e_N),\ x \cdot \tau \ge v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}.$$

Доказательство. Положим

$$D(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \big| x \cdot e_N = v(e_N),\ x \cdot \tau \ge v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}$$

и докажем сначала вложение $D(v) \subseteq C(v)$. Рассуждая от противного, допустим, что некоторый элемент $x \in D(v)$ не принадлежит ядру $C(v)$. Тогда, согласно определению $C(v)$, существует коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$ и вектор $y = (y_i)_{i \in N(\tau)}$ такие, что $y_i > x_i$, $i \in N(\tau)$ и $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \le v(\tau)$. Рассмотрим скалярное произведение $y \cdot \tau_{N(\tau)}$. Принимая во внимание вышеуказанные неравенства $y_i > x_i$, $i \in N(\tau)$, и неотрицательность векторов $\tau \in \sigma_F$, получаем: $y \cdot \tau_{N(\tau)} > x \cdot \tau_{N(\tau)}$. Но, согласно нашему предположению, должно выполняться неравенство $x \cdot \tau_{N(\tau)} \ge v(\tau)$. Из двух последних неравенств имеем: $y \cdot \tau_{N(\tau)} > v(\tau)$. Но это неравенство противоречит условию $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \le v(\tau)$.

Для доказательства обратного вложения $C(v) \subseteq D(v)$ допустим, что существует элемент $x \in C(v)$ и коалиция $\tau \in \sigma_F$ такие, что $x \cdot \tau < v(\tau)$. Положим $\delta = v(\tau) - x \cdot \tau$ и рассмотрим вектор $y = x + z$, где

$$z_i = \delta/\tau(N), i \in N(\tau), \quad z_i = 0, i \in N \setminus N(\tau).$$

Ясно, что $y_i > x_i$ для каждого игрока $i \in N(\tau)$, и при этом $y \cdot \tau = v(\tau)$. Следовательно, x блокируется нечёткой коалицией τ, что противоречит предположению $x \in C(v)$.

Суммируя, получаем требуемое равенство $C(v) = D(v)$. $\square$

Переходя к критерию непустоты ядра нечёткой TU-кооперативной игры, напомним [2], что конечный набор нечётких коалиций $\{\tau_k\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F$ называется *F-сбалансированным* [2], если существуют неотрицательные числа λ_k, $k \in K$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k \in K} \lambda_k \tau_k = e_N.$$

Числа λ_k, по аналогии с наборами обыкновенных коалиций [5], будем называть (балансирующими) весами нечётких коалиций $\tau_k, k \in K$.

Определение 2.8. Нечёткая TU-кооперативная игра $v : \sigma_F \to \mathbb{R}$ называется *V-сбалансированной* [2], если выполняется условие:

$$\sum_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$$

для любого F-сбалансированного семейства $\{\tau_k\}_{k \in K}$ и отвечающих ему балансирующих весов λ_k.

Обобщая те же методы линейного программирования, что и в работах [5] и [6], получаем следующий критерий непустоты ядра в нечётких TU-кооперативных играх [2].

Теорема 2.1. *Ядро $C(v)$ нечёткой TU-кооперативной игры v непусто тогда и только тогда, когда она является V-сбалансированной.*

Следствие 2.1. *Если v является суперлинейной нечёткой игрой, то её ядро $C(v)$ непусто.*

Доказательство. Напомним [4], что v называется суперлинейной, если $v(t\tau) = tv(\tau)$ при $t > 0$ и $t\tau \in \sigma_F$ и, кроме того, $v(\sum_{k \in K} \tau_k) \geq \sum_{k \in K} v(\tau_k)$ для любого конечного семейства $\{\tau_k\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F$ такого, что $\sum_{k \in K} \tau_k$ принадлежит σ_F. Рассмотрим произвольное F -сбалансированное семейство $\{\tau_k\}_{k \in K}$ и отвечающие ему балансирующие веса λ_k. Вычисляя значение $v(e_N) = v(\sum_{k \in K} \lambda_k \tau_k)$ для суперлинейной игры v, получаем

$$v(e_N) \geq \sum_{k \in K} v(\lambda_k \tau_k) = \sum_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k).$$

Следовательно, ввиду произвольности выбора F -сбалансированного семейства и отвечающих ему весов, получаем требуемое: суперлинейная игра v является V -сбалансированной. $\square$

§ 3. Основной результат

Переходя к изложению основного результата работы, напомним сначала необходимые понятия и обозначения. Через $V_{(+2)}(N)$ обозначим конус *почти положительных игр n лиц*. Эти игры характеризуются неотрицательностью всех дивидендов Харшаньи, отвечающих коалициям, состоящим из двух или более участников (ниже, как и ранее, символом $|S|$ обозначается число элементов множества S):

$$V_{(+2)}(N) = \{v \in V(N) \mid v_S \geq 0, \quad |S| \geq 2\}.$$

Ясно, что в силу неотрицательности дивидендов v_S (при $|S| \geq 2$) почти положительной игры v, из суперлинейности функций $\prod_{i \in S} \tau_i^{\frac{1}{|S|}}$, $S \in \sigma_0$, вытекает суперлинейность расширения Харшаньи v_{Au} этой игры. Отсюда, на основании Следствия 2.1 вытекает следующий результат.

Предложение 3.2. *Расширение Обэна v_{Au} всякой почти положительной игры v имеет непустое ядро: $C(v_{Au}) \neq \emptyset$ для всех $v \in V_{(+2)}(N)$.*

Напомним определение супердифференциала нечёткой игры [3] (подобное тому, что было предложено Ж.-П. Обэном [4]). Мы уделяем большое внимание этому объекту по причине его совпадения (при определённых условиях) с ядром нечёткой кооперативной игры [3]. Начнем с понятия суперградиента нечёткой игры.

Определение 3.9. Вектор $c \in \mathbb{R}^N$ является *суперградиентом* нечёткой игры $v : \sigma_F \to \mathbb{R}$ в точке $\tau* \in \sigma_F$, если выполняется условие

$$v(\tau) - v(\tau*) \leq c \cdot (\tau - \tau*), \quad \tau \in \sigma_F.$$

Множество $\hat{\partial} v(\tau^*)$ всех суперградиентов игры v в точке τ^* называется супердифференциалом игры v в точке τ^*.

Определение 3.10. [3] Супердифференциал $\hat{\partial} v(e_N^*)$ нечёткой игры v в точке $e_N^* = \frac{1}{n} e_N$ называется *супердифференциалом игры v*.

Замечание 3.4. Напомним, что через I обозначается единичный интервал $[0, 1]$. Нетрудно проверить, что введённое понятие супердифференциала совпадает с классическим [4], когда в такой же схеме вместо $v : I^N \to \mathbb{R}$ берется продолжение v^* этой функции на все пространство $\mathbb{R}^N$, определяемое формулой

$$v^*(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \tau \in I^N, \\ -\infty, & \tau \in \mathbb{R}^N \setminus I^N. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что заключения классического субдифференциального исчисления, относящиеся к супердифференциалу функции v^* в точке e_N^* справедливы и по отношению к введённому множеству $\hat{\partial} v(e_N^*)$.

Как уже отмечалось, основной результат работы опирается на тесную взаимосвязь ядер и супердифференциалов некоторых классов кооперативных игр (см., например, [3]). Для полноты изложения ниже приводится короткое доказательство важного факта, характеризующего один из таких классов. Напомним [3], что *диагональная однородность* нечёткой игры v означает, что $v(te_N^*) = tv(e_N^*)$ для всех $t \in (0, n]$.

Теорема 3.2. *Если v является диагонально однородной нечёткой кооперативной игрой, и её ядро $C(v)$ непусто, то оно совпадает с супердифференциалом этой игры*

$$C(v) = \hat{\partial} v(e_N^*).$$

Доказательство. Начнём с вложения $C(v) \subseteq \hat{\partial} u(e_N^*)$. Пусть x является элементом ядра $C(v)$. Покажем, что он принадлежит супердифференциалу этой игры. Рассмотрим произвольную нечёткую коалицию τ. Из предположения $x \in C(v)$ и Предложения 2.1 получаем: $x \cdot \tau \geq v(\tau)$. Отсюда, в силу равенств $v(e_N^*) = \frac{v(e_N)}{n}$ (согласно диагональной однородности v) и $x \cdot e_N = v(e_N)$ (ввиду $x \in C(v)$) вытекает неравенство

$$x \cdot \tau - x \cdot e_N^* \geq v(\tau) - v(e_N^*). \tag{1}$$

Значит, на основании произвольности выбора τ в силу (1) получаем требуемое: x принадлежит супердифференциалу игры v.

Чтобы доказать противоположное вложение $\hat{\partial} v(e_N^*) \subseteq C(v)$, рассмотрим произвольный элемент $x \in \hat{\partial} v(e_N^*)$ и зафиксируем какое-либо число $\epsilon \in (0, 1)$. По определению супердифференциала и в силу диагональной однородности функции v имеем:

$$x \cdot \epsilon e_N^* - x \cdot e_N^* = (\epsilon - 1) x \cdot e_N^* \geq v(\epsilon e_N^*) - v(e_N^*) = (\epsilon - 1) v(e_N^*),$$

$$x \cdot (1 + \epsilon) e_N^* - x \cdot e_N^* = \epsilon x \cdot e_N^* \geq v((1 + \epsilon) e_N^*) - v(e_N^*) = \epsilon v(e_N^*).$$

Значит, ввиду положительности чисел ϵ и $1 - \epsilon$, получаем: $x \cdot e_N^* = v(e_N^*)$. Следовательно, из неравенств

$$x \cdot \tau - x \cdot e_N^* \geq v(\tau) - v(e_N^*), \quad \tau \in \sigma_F,$$

определяемых включением $x \in \hat{\partial} v(e_N^*)$, вытекают соотношения

$$x \cdot \tau \geq v(\tau) \quad \text{для всех } \tau \in \sigma_F. \tag{2}$$

Для завершения доказательства включения $x \in C(v)$ напомним еще раз, что вышеуказанное равенство $x \cdot e_N^* = v(e_N^*)$ и диагональная однородность функции v влекут равенство $x \cdot e_N = v(e_N)$. Это равенство вместе с неравенствами (2) доказывает требуемое включение $x \in C(v)$. $\square$

Замечание 3.5. Анализируя доказательство Теоремы 3.2, нетрудно убедиться, что требование диагональной однородности можно существенно ослабить. Именно, достаточно выполнения условия двухточечной однородности v : существуют числа μ, ν такие, что $0 < \mu < 1 < \nu \leq n$ и, кроме того, для них выполняются равенства $v(\mu e_N^*) = \mu v(e_N^*)$ и $v(\nu e_N^*) = \nu v(e_N^*)$.

Следствие 3.2. *Если $C(v) \neq \emptyset$ и v является однородной игрой (т.е., $v(t\tau) = tv(\tau)$ для всех $t > 0$ и $t\tau \in \sigma_F$), то для неё выполняется равенство $C(v) = \hat{\partial} v(e_N^*)$.*

Далее будет использоваться следующая ослабленная версия известной теоремы Моро-Рокафеллара, относящейся к формуле субдифференциала суммы конечного числа функций [12] (см. также [15]).

Предложение 3.3. *Пусть собственные выпуклые функции $f_1, \ldots, f_m$*[1] *таковы, что каждая из них является непрерывной в некоторой (одной для всех) точке $\bar{x} \in X$, где $X = \cap_{i=1}^m dom\ f_i$. Тогда в каждой точке $x \in X$ субдифференциал $\partial(\sum_{i=1}^m f_i)(x)$ их суммы равен сумме (по Минковскому) $\sum_{i=1}^m \partial f_i(x)$ субдифференциалов этих функций.*

Суммируя Следствие 3.2 и Предложение 3.3, получаем следующий результат, используемый в доказательстве основной теоремы.

Следствие 3.3. *Для любого конечного набора непрерывных суперлинейных нечётких игр $\{v_k\}_{k \in K}$ справедливо равенство*

$$C(\sum_{k \in K} v_k) = \sum_{k \in K} C(v_k). \tag{3}$$

Перейдем, наконец, к доказательству основного результата работы: ядро расширения Обэна всякой почти положительной игры состоит из её вектора Шепли.

Теорема 3.3. *Для любой игры $v \in V_{(+2)}(N)$ имеет место равенство*

$$C(v_{Au}) = \{\Phi(v)\}.$$

[1]Напомним [15], что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ называется собственной функцией, если $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = -\infty\} = \emptyset$ и $\mathrm{dom}\ f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 26-41
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 26-41

Доказательство. В дальнейшем используются Предложения 2.1, 3.2. Их применение основано на следующих соображениях. Пусть $\{v_k\}_{k\in K}$ — некоторый конечный набор игр из $V_{(+2)}(N)$, а $v_k^* = (v_k)_{Au}$ — отвечающие им расширения Обэна. Тогда при выполнении равенств

$$C(v_k^*) = \{\Phi(v_k)\}, \quad k \in K, \tag{4}$$

получаем $C(v^*) = \{\Phi(v)\}$, где $v = \sum_{k\in K} v_k$, а $v^* = v_{Au}$. Действительно, на основании Предложения 2.1 из равенств (4) вытекает включение

$$\sum_{k\in K} \Phi(v_k) \in C(\sum_{k\in K} v_k^*).$$

Но из аддитивности дивидендов Харшаньи по характеристическим функциям игр из $V(N)$ и из Теоремы 3.2 и Предложений 2.1, 3.3 следуют равенства

$$C(\sum_{k\in K} v_k^*) = C(v^*) = \hat{\partial} v^*(e_N^*) = \sum_{k\in K} \hat{\partial} v_k^*(e_N^*).$$

Отсюда, ввиду равенств $C(v_k^*) = \hat{\partial} v_k^*(e_N^*)$, $k \in K$, вытекающих из Теоремы 3.2, имеем: $C(v^*) = \sum_{k\in K} C(v_k^*)$. Но последнее равенство ввиду соотношений (4) означает, что множество $C(v^*)$ тоже одноэлементно и состоит из вектора $\sum_{k\in K} \Phi(v_k)$. Отсюда, с учётом аддитивности вектора Шепли, получаем требуемое равенство $C(v^*) = \{\Phi(v)\}$.

Заметим, что слагаемые $v_S u_{Au}^S$ в расширении Обэна $v_{Au} = \sum_{S\in\sigma_0} v_S u_{Au}^S$ любой почти положительной игры v являются непрерывными суперлинейными функциями. Следовательно, ввиду линейности вектора Шепли, а также в силу Теоремы 3.2 и Следствия 3.3(соотношение (3)), мы можем свести наше доказательство к соответствующей проверке для расширений Обэна u_{Au}^S игр единогласия u^S.

Зафиксируем какую-либо коалицию $S \in \sigma_0$ и рассмотрим расширение Обэна u_{Au}^S игры u^S. Напомним, что согласно определению этого расширения для игр единогласия справедлива формула

$$u_{Au}^S(\tau) = \prod_{i\in S} \tau_i^{\frac{1}{|S|}}, \quad \tau \in \sigma_F.$$

Положим $s = |S|$. Легко проверить, что из определения вектора Шепли вытекает формула: $\Phi(u^S) = e_S^*$, где вектор e_S^* определяется формулой

$$(e_S^*)_i = \begin{cases} \frac{1}{s}, & i \in S, \\ 0, & i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Для доказательства включения $\Phi(u^S) \in C(u^S_{Au})$ воспользуемся известным неравенством для среднего арифметического и среднего геометрического:

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

для любых чисел $a_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n$, и $n \geq 1$. Согласно этому неравенству мы получаем следующие соотношения: $e^*_S \cdot \tau \geq \prod_{i \in S} \tau_i^{\frac{1}{s}}$ для любой нечёткой коалиции τ. Следовательно, по определению u^S_{Au} имеем

$$e^*_S \cdot \tau \geq u^S_{Au}(\tau), \quad \tau \in \sigma_F.$$

Значит, из Предложения 2.1 и очевидного равенства $e^*_S \cdot e_N = u^S_{Au}(e_N)$ получаем: вектор e^*_S принадлежит ядру $C(u^S_{Au})$.

Чтобы доказать, что $C(u^S_{Au})$ не содержит никаких других элементов, допустим противное. Тогда должен существовать некоторый дележ x из $C(u^S_{Au})$ не равный e^*_S. Ясно, что в силу неблокируемости одноэлементными коалициями все компоненты вектора x неотрицательны и, кроме того, должны выполняться соотношения

$$\sum_{i \in S} x_i = 1,\ x_j = 0,\ j \in N \setminus S.$$

Здесь равенства следуют из неблокируемости x коалициями e_N и e_S.

Проанализируем возможные ситуации: 1) $x_i > 0$ для всех игроков $i \in S$, и 2) существует $i_0 \in S$ такой, что $x_{i_0} = 0$.

Рассмотрим первую ситуацию и покажем, что в её условиях нечёткая коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, определяемая формулой

$$\tau_i = \begin{cases} \prod_{j \in S \setminus \{i\}} x_j, & i \in S, \\ 0, & i \in N \setminus S, \end{cases}$$

блокирует распределение выигрышей x. Действительно, из неравенства среднего арифметического и среднего геометрического при несовпадающих между собой компонентах вектора x с индексами из множества S получаем строгое неравенство

$$\prod_{i \in S} x_i^{\frac{1}{s}} < \frac{\sum_{i \in S} x_i}{s} = \frac{1}{s}.$$

Значит, $s < \prod_{j \in S} x_j^{-\frac{1}{s}}$ (напомним, что в нашей ситуации выполняется условие $\prod_{j \in S} x_j > 0$). Умножая обе стороны последнего неравенства на число $\prod_{j \in S} x_j$, из равенств

$$x \cdot \tau = s \prod_{j \in S} x_j \quad \text{и} \quad u^S_{Au}(\tau) = \prod_{j \in S} x_j^{\frac{s-1}{s}}$$

получаем строгое неравенство $x{\cdot}\tau < u^S_{Au}(\tau)$, противоречащее нашему предположению $x \in C(u^S_{Au})$.

В заключение отметим, что вторая ситуация редуцируется к первой. Действительно, в силу Предложения 2.1 ядро нечёткой игры u^S_{Au} является выпуклым множеством. Поэтому элементы $x_t = tx+(1-t)e^*_S$ принадлежат $C(u^S_{Au})$ для любого числа $t \in (0,1)$. Но $x_t \neq e^*_S$ и при этом $(x_t)_i > 0$ для каждых $i \in S$ и $t \in (0,1)$. $\square$

Список литературы

1. *Shapley L. S.* Cores of convex games // *Int. J. Game Th.* 1971. V. 1. P. 11–26.

2. *Васильев В. А.* Аналог теоремы Бондаревой-Шепли I. Непустота ядра нечёткой игры // *Матем. теория игр и её приложения* 2017. Т. 9, № 1. С. 3–26.

3. *Васильев В. А.* Ядро и супердифференциал нечёткой TU-кооперативной игры // *Матем. теория игр и её приложения* 2020. Т. 12, № 2. С. 20–35.

4. *Aubin J.-P. Optima and Equilibria.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

5. *Бондарева О. Н.* Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // *Проблемы кибернетики* 1963. Вып. 10. С. 119–140.

6. *Shapley L. S.* On balanced sets and cores // *Naval Res. Logist. Quart.* 1967. V. 14. P. 453–460.

7. *Нейман Дж. фон., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука, 1970.

8. *Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки.* М.: Мир, 1974.

9. *Dehez P.* On Harsanyi dividends and asymmetric values // *Int. Game Theory Rev.* 2017. V. 19, N 3. P. 1–36.

10. *Shapley L. S.* A value for n-person games // *Annals of Mathematics Studies* 1953. V. 28. P. 307–317.

11. *Peleg B. and Sudhölter P. Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 26-41
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 26-41

12. *Aubin J.-P. Mathematical Methods of Games and Economic Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1979.

13. *Экланд И. Элементы математической экономики.* М.: Мир, 1983.

14. *Aubin J.-P.* Cooperative fuzzy games // *Math. Oper. Res.* 1981. V. 6. P. 1–13.

15. *Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

References

1. *Shapley L. S.* Cores of convex games // *Int. J. Game Th.* 1971. V. 1. P. 11–26.

2. *Vasil'ev V. A.* An analog of the Bondareva-Shapley theorem I. The non-emptyness of the core of a fuzzy game // *Autom. and Remote Control* 2019. V. 80. P. 1148–1163.

3. *Vasil'ev V. A.* Core and super-differential of a fuzzy TU-cooperative game // *Autom. and Remote Control* 2021. V. 82. P. 926–934.

4. *Aubin J.-P. Optima and Equilibria.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

5. *Bondareva O. N.* Some applications of linear programming methods to the theory of coopertive games // *Problemi Kibernetiki* 1963. V. 10. P. 119–140.

6. *Shapley L. S.* On balanced sets and cores // *Naval Res. Logist. Quart.* 1967. V. 14. P. 453–460.

7. *von Neumann J. and Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press, 1944.

8. *Rosenmüller J. Kooperative Spiele und Märkte.* Berlin etc: Springer-Verlag, 1971.

9. *Dehez P.* On Harsanyi dividends and asymmetric values // *Int. Game Theory Rev.* 2017. V. 19, N 3. P. 1–36.

10. *Shapley L. S.* A value for n-person games // *Annals of Mathematics Studies* 1953. V. 28. P. 307–317

11. *Peleg B. and Sudhölter P. Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 26-41
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 26-41

12. *Aubin J.-P. Mathematical Methods of Games and Economic Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1979.

13. *Ekeland I. Éléments D' Économie Mathématique.* Paris: Hermann, 1983.

14. *Aubin J.-P.* Cooperative fuzzy games // *Math. Oper. Res.* 1981. V. 6. P. 1–13.

15. *Rockafellar R. T. Convex Analysis.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

Информация об авторе

Валерий Александрович Васильев, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник
AuthorID: 9742
Scopus Author ID 56994308600

Author Information

Valery A. Vasil'ev, Doctor of Mathematics, Professor; Chief Researcher
AuthorID: 9742
Scopus Author ID 56994308600

Статья поступила в редакцию 19.09.2024;
одобрена после рецензирования 28.10.2024; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 19.09.2024;
approved after reviewing 28.10.2024; accepted for publication 30.10.2024