Научная статья
УДК 519.6+515.127
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-5-18

ОБ АСИМПТОТИКЕ АЛЕКСАНДРОВСКОГО n-ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЖЕВРЕ

Владимир Никитич Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

belykh@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000 0002 4428 3087

Аннотация

Указана асимптотика александровского n-поперечника компакта C^{∞}-гладких периодических функций класса Жевре, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на единичной окружности S функций.

Ключевые слова и фразы

компакт, класс Жевре, топологическая размерность, александровский n-поперечник, запас гладкости, ненасыщаемость.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).)

Для цитирования

Белых В. Н. Об асимптотике александровского n-поперечника компакта бесконечно гладких периодических функций класса Жевре // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 4, С. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-5-18

ON THE ASYMPTOTICS OF THE ALEXSANDROV'S n-WIDTH COMPACT INFINITELY SMOOTH PERIODIC FUNCTION OF THE GEVREY'S CLASS

Vladimir N. Belykh

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia

belykh@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000 0002 4428 3087

Abstract

The asymptotics of the Alexandrov's n-width of a compact of the C^{∞}-smooth periodic functions of the Gevrey's class finitely embedded in the space of the C continuous functions on a unit circle of the S functions has been obtained.

Keywords

compact set, Gevrey's class, topological dimension, Alexandrov's n-width, amount of smoothness, unsaturation.

Funding

The work was completed within the framework of the state assignment of the SB RAS assignment (project FWNF-2022-0008).

For citation

Belykh V. N. On the asymptotics of the Alexandrov's n-width compact infinitely smooth periodic functions of the Gevrey's class // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 4, P. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-4-5-18

§ 1. Введение и постановка задачи

Интерес автора к рассматриваемой в статье проблематике не случаен; он инициирован принципиально новым, предложенным К.И. Бабенко [1], подходом к вопросу конструирования численных алгоритмов решения эллиптических задач [2]. Действительно, при создании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идёт об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию. При этом содержательное представление об X извлекается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. Наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в метрический компакт, приводит к понятию александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$, который определяется, в свою очередь, как нижняя грань ε-сдвигов компакта X в компакт топологической размерности, не большей n [3, гл.1, § 2, п. 4].

Итак, сыграв ключевую роль в оценке предельных аппроксимационных возможностей компакта X, асимптотика александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ определяет точность, с которой компакт X исчерпывается (с ростом n) компактами топологической размерности $\leq n$. Скорость убывания $\alpha_n(X)$ к нулю сравнивается при этом с числом n свободных числовых параметров конечномерного описания X: она тем выше, чем бо́льший "запас" гладкости X. Для компактов X функций конечной и бесконечной гладкости эти асимптотики различаются принципиально: если в первом случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю осуществляется как некоторая фиксированная степень числа $1/n$, то во втором случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю происходит быстрее любой конечной степени числа $1/n$, т.е. экспоненциально (см. [3]).

Оказавшись глубоким математическим фактом, понятие александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$, подвигло К.И. Бабенко (см. [4, гл. 3, § 2, п. 5]) к переосмыслению самого статуса значимости для цифровых вычислений дополнительной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задачи. Последнее привело к открытию принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных методов (и алгоритмов), практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$. Отличительная черта ненасыщаемого численного метода — способность автоматически с ростом параметра n подстраиваться к любым аппроксимационным возможностям компакта X решений задачи. В результате имеющаяся избыточная (экстраординарная) гладкость компакта X, находившаяся прежде на периферии насущных интересов цифровых вычислений, становится их активным персонажем. Пик эффективности ненасыщаемых численных методов — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классе бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численных методы от численных методов с насыщением: конечно разностных, конечных элементов, квадратур и др. [1,4].

Существуют классы задач (например, эллиптические [2]), компакты X решений которых состоят из C^∞-гладких функций различной природы. Классы таких функций, занимающих промежуточное положение между функциями аналитическими и функциями конечной гладкости, задаются обычно указанием мажоранты роста их k-х производных при $k \to \infty$.

В работе указана асимптотика александровского n-поперечника $\alpha_n(X, C)$ компакта периодических C^∞-гладких функций Жевре класса $\alpha \geq 1$, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на единичной окружности S функций. Получение результата основано на предложенной ранее автором новой характеризации класса периодических C^∞-гладких функций, апеллирующей к наилучшему чебышёвскому его описанию тригонометрическими многочленами [5].

Отметим, что вычисление асимптотик александровских n-поперечников $\alpha_n(X, C)$ для различных классов C^∞-гладких функций — задача непростая; и решена она пока в немногих частных случаях (см. [3, гл. 4, § 3, п. 3], [6], [7, гл. 4, § 4.5.4]).

§ 2. Компакт: размерность, александровский n-поперечник

Пусть X — компакт в банаховом пространстве B и Υ — его открытое конечное покрытие. Выбор конечного покрытия Υ всегда неоднозначен, поскольку, согласно теореме Бореля-Лебега, у рассматриваемой задачи есть много решений. Каково, однако, должно быть топологическое свойство элементов покрытия Υ, чтобы оно могло быть положено в основу процедуры однозначного отбора нужного покрытия? Из совокупности общих топологических свойств элементов покрытия Υ выделим следующее. Пусть $m \geq 0$ целое число. Покрытие Υ имеет *кратность* m, если любые $(m+1)$ его элементов не пересекаются, и существует m элементов, имеющих непустое пересечение. Ранее, говоря о финитизации компакта X, мы несколько неопределённо характеризовали её, указывая лишь на то, что элементы X определяются конечным набором числовых независимых параметров. К тому же вовсе не очевидно, что идею числа измерений (или размерности) можно математически сформулировать для столь общих объектов как функциональный компакт.

Понятие кратности вполне однозначно можно связать с так называемой аппроксимационной размерностью функционального компакта X, что делает восприятие размерности (как числа измерений) внутренне непротиворечивым. Нетривиальность понятия размерности функционального компакта X подчёркивает следующее

Определение (см. [7, гл. 1, § 1.7, п. 1.7.3]). Компакт X имеет топологическую размерность m ($\dim X = m$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие X открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$ и кратности $\leq m+1$, но для достаточно малого ε уже не существует открытого ε-покрытия, кратность которого не превосходит m.

Итак, с каждым ε-покрытием компакта X всегда можно связать некое натуральное число, а именно число m, для которого в X существует точка, принадлежащая m различным элементам Υ. Указанное определение вполне соответствует нашему интуитивному представлению о размерности, например, куба I^m с ребром $d > 0$

$$I^m \equiv I_d^m = \Big\{\xi \in R^m : |\xi_r| \leq d/2, r = 0, 1, \ldots, m-1\Big\}, \qquad (2.1)$$

т.к. его содержательность подкрепляется теоремой Лебега – Брауэра: $\dim I^m = m$.

Александровский m-поперечник компакта X определяется [3, гл. 1, § 2, п. 4]:

$$\alpha_m(X, B) = \inf_{(X^m,\, \nu)} \sup_{f \in X \subset B} \|f - \nu(f)\|, \qquad (2.2)$$

где inf берётся по всевозможным парам (X^m, ν), состоящим из лежащего в банаховом пространстве B компакта X^m топологической размерности m и непрерывного отображения $\nu : X \to X^m$.

Введение П. С. Александровым [8] понятия m-поперечника свидетельствует о принципиально важной связи компакта X в банаховом пространстве B с элементарными геометрическими образованиями X^m в нём. Именно, каждую точку f компакта $X \subset B$ можно задавать с точностью ε непременно m “координатами”, если желать, чтобы эти координаты непрерывно зависели от точки, а сама точка — от координат.

Пусть $m \geq 0$ целое число и

$$l_\infty^m = \Big\{\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in R^m, |\xi|_\infty = \max_{r=0,1,\ldots,m-1} |\,\xi_r|\Big\}.$$

Справедлива следующая важная для дальнейшего (см. [1])

Лемма 1. *Если I_d^m — куб с длиной ребра d и топологической размерностью $\dim I_d^m = m$, то $\alpha_{m-1}(I_d^m, l_\infty^m) = d/2$.*

Согласно следствию теоремы 1.4 из работы [1] справедливость леммы вытекает из теоремы 2 (см. [7, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]) и следствия теоремы 4 (см. [7, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.2]).

§ 3. Определение класса Жевре и основной результат

Проведению оценок александровского m-поперечника компакта периодических C^∞-гладких функций Жевре класса $\alpha \geq 1$ предпошлём ряд определений, связанных с приближением периодических функций тригонометрическими многочленами. Начнём с определений.

Пусть $\widetilde{C}[0,2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси R функций с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\widetilde{C}[0,2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности $S \equiv [0,2\pi]$ функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом их продолжении на всю ось R; пусть $C^k \equiv C^k[S]$ — пространство таких $k \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых на S периодических функций; обозначим через $C^\infty \equiv C^\infty[S]$ класс 2π-периодических бесконечно дифференцируемых на единичной окружности S функций.

Вещественную 2π-периодическую бесконечно дифференцируемую на S функцию $\varphi(t)$ назовём функцией Жевре класса $\alpha \geq 1$, если существуют положительные константы c и A такие, что для каждой точки $t \in S$ и для всякого $k \geq 0$ верны неравенства

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq cA^k k^{\alpha k}, \quad \alpha \geq 1, \quad c > 0, \quad A > 0. \tag{3.1}$$

Всякую функцию $\varphi(t)$ из C^∞ отождествим с тригонометрическим рядом:

$$\varphi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\big(c_{2p}\cos pt + c_{2p-1}\sin pt\big) \equiv \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\pi_p(t). \tag{3.2}$$

Ряд (3.2) сходится в гильбертовом пространстве $L_2[S]$; а в силу полноты и ортогональности функций $\{\pi_p(t)\}$, он является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$ из C^∞:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt, \qquad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt \qquad \forall p \geq 1.$$

Пространство функций Жевре класса $\alpha \geq 1$ на S обозначим через $\widetilde{G}_\alpha^\infty \subset C^\infty$.

Пусть $\mathcal{T}^m \subset \widetilde{C}[0,2\pi]$ — класс тригонометрических многочленов порядка $\leq m$ и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m\in\mathcal{T}^m} \|\varphi - \iota_m\|, \quad m \geq 0, \quad \varphi \in C. \tag{3.3}$$

Здесь inf осуществляется на некотором элементе (многочлене) из $\mathcal{T}^m$.

Пусть $\{G(k)\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty. \tag{3.4}$$

Согласно классической теоремы Арцела множество функций

$$\widetilde{K}_G^\infty \equiv \left\{\varphi \in C^\infty : \|\varphi\| \le G(0), \|\varphi^{(k)}(t)\| \le G(k), \forall k > 0\right\} \tag{3.5}$$

является компактом в пространстве C непрерывных на окружности S функций.

Переход к описанию C^k-гладких периодических на S функций основывается на учёте для целых $m \ge 0$ классических неравенств Джексона (см. [4, гл. 3, § 1, п. 5]):

$$e_m(\varphi) \le \Lambda_k \cdot \frac{\|\varphi^{(k)}\|}{m^k}, \quad k \ge 0, \quad \frac{2}{\pi} \le \Lambda_k = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \le \frac{\pi}{2} \tag{3.6}$$

и состоит в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(k)\}$ монотонных функций $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ вещественного аргумента r, обладающих на полуоси $r \ge 0$ рядом полезных свойств. Удобные рекуррентные формулы для вычисления констант Фавара Λ_k указаны в работах [9], [10].

В работе [6] дано описание компакта $\widetilde{K}_G^\infty$ в терминах двух монотонных функций:

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0), & 0 \le r < 1, \\ \inf\limits_{k\ge 0} \dfrac{G(k)}{r^k}, & r \ge 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ \max\left\{k \mid \mu(r) = \dfrac{G(k)}{r^k}\right\}, & r \ge 1, \end{cases}$$

которые при выполнении условия (3.4) связаны зависимостью

$$\mu(r) = G(0)e^{-\int\limits_1^r \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt}, \quad r \ge 1, \tag{3.7}$$

становящейся ключевой в подходе к вычислению асимптотики $\alpha_m(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ компакта C^∞-гладких периодических на S функций Жевре класса $\alpha \ge 1$.

В определении функции $\mu(r)$ знак inf можно заменить на min, т.е.

$$\mu(r) = \min_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\vartheta(r)]}{r^{\vartheta(r)}}$$

и потому

$$e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m). \tag{3.8}$$

Поскольку компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset C^\infty$ задаётся (см. (3.5)) указанием мажоранты $G(k)$ роста k-х производных его элементов и при этом вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (3.2), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $\widetilde{K}_G^\infty$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей компакт $\widetilde{K}_G^\infty$?

Справедлива следующая

Лемма 2. [6] *Если функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty \subset C^\infty$, то*

$$|c_0| \leq 2G(0), \quad |c_{2p-1}| \leq 2\mu(p), \quad |c_{2p}| \leq 2\mu(p) \quad \forall p \geq 1.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из C^∞ удовлетворяют неравенствам

$$|c_0| \leq G(0), \quad |c_{2p-1}| \leq \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad |c_{2p}| \leq \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2} \quad \forall p \geq 1,$$

то функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$ (см. (3.5)).

Отождествив компакт $\widetilde{K}_G^\infty$ с множеством тригонометрических рядов (3.2), мы создаём конструктивный аппарат для получения нужных асимптотик.

Справедлива следующая элементарная

Лемма 3. *Если функция $f(r)$ возрастает для $r \geq 1$, то*

$$\sum_{r=1}^{m} f(r) \leq \int_1^m f(r)d\,r + f(m). \tag{3.9}$$

Доказательство следует из простого неравенства

$$f(\nu) \leq \int_\nu^{\nu+1} f(\nu)d\,\nu,$$

просуммировав обе части которого от 1 до $m-1$ и присоединив к полученным результатам по слагаемому $f(m)$, приходим к (3.9). Лемма 3 доказана.

Для класса $\widetilde{G}_\alpha^\infty \subset C^\infty$, т.е. когда $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$ и выполнено условие (3.4), находим явное выражение функции $\mu(r)$ (подробности см. [5]):

$$\mu(r) = e^{-\varrho r^{1/\alpha}}, \quad \varrho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A}.$$

Далее, для $m \geq 0$ и $1 \leq \alpha < \infty$ определим функцию

$$\gamma_\alpha(m) \equiv \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} = e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m}}\Big(1 + e^{\varrho\sqrt[\alpha]{1}} + e^{\varrho\sqrt[\alpha]{2}} + \ldots + e^{\varrho\sqrt[\alpha]{m}}\Big), \quad (3.10)$$

характеризующую сложность устройства класса Жевре $\widetilde{G}_\alpha^\infty \subset C^\infty$.

Пусть $\beta = 1/\alpha$. Преобразуем (3.10), применив лемму 3, к виду

$$\gamma_\alpha(m) \cdot e^{\varrho m^\beta} = \sum_{r=0}^{m} e^{\varrho r^\beta} = 1 + \sum_{r=1}^{m} e^{\varrho r^\beta}$$

$$\leq 1 + \int_1^m e^{\varrho r^\beta} d\,r + e^{\varrho m^\beta} \leq 1 + J_\alpha(m) + e^{\varrho m^\beta}.$$

Но, поскольку $\alpha \geq 1$, величина интеграла $J_\alpha(m)$ вычисляется заменой переменной $r = x^\alpha$ и затем оценивается следующим образом:

$$J_\alpha(m) = \int_1^m e^{\varrho r^\beta} d\,r = \alpha \int_1^{m^\beta} e^{\varrho x} \frac{d\,x}{x^{\alpha-1}} \leq \frac{\alpha}{\varrho}\Big(e^{\varrho m^\beta} - e^{\varrho}\Big).$$

В итоге, приходим к такому неравенству

$$\gamma_\alpha(m) \cdot e^{\varrho m^\beta} \leq 1 + J_\alpha(m) + e^{\varrho m^\beta} \leq 1 + \frac{\alpha}{\varrho}\Big(e^{\varrho m^\beta} - e^{\varrho}\Big) + e^{\varrho m^\beta}.$$

Откуда сразу получаем нужную для дальнейшего оценку:

$$\gamma_\alpha(m) \equiv \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \leq e^{-\varrho m^\beta}\left(1 + \frac{\alpha}{\varrho}\Big(e^{\varrho m^\beta} - e^{\varrho}\Big) + e^{\varrho m^\beta}\right)$$

$$= 1 + e^{-\varrho m^\beta} + \frac{\alpha}{\varrho}\Big(1 - e^{-\varrho(m^\beta - 1)}\Big) \leq 2 + \frac{\alpha}{\varrho} = 2 + e\sqrt[\alpha]{A} \equiv \varpi < \infty. \quad (3.11)$$

Приближение периодических функций (см. (3.2)) тригонометрическими многочленами порядка не выше $m-1$ определяет подпространство $\mathcal{T}^{m-1} \subset C$ многочленов топологической размерности $\dim \mathcal{T}^{m-1} = 2m-1$.

Оценка сверху для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ (см. (3.8)) получена в [6]:

$$\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C) \leq \inf_{(\mathcal{T}^{m-1}, \nu)} \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} \|\varphi - \nu(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} e_{m-1}(\varphi) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m-1). \quad (3.12)$$

Перейдём к построению оценки снизу для $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$. Приём, который использован ниже, был употреблён в [6]. Воспользуемся геометрическими соображениями и леммой 1 об отображении куба, а также свойствами монотонности поперечника $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ по включению множеств и не возрастания его величины как функции цифрового параметра m. В самом деле, если компакт X_0 можно линейно и изометрично отобразить в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, то $\alpha_{2m}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$. В качестве X_0 выберем куб $Q^{2m+1} \subset \widetilde{K}_G^\infty$, для которого $\alpha_{2m}(Q^{2m+1}, C)$ вычисляется.

Пусть φ из $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{G}_\alpha^\infty$ и $\varphi(t) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \pi_r(t)$, тогда для любого $k \ge 0$:

$$\|\varphi^{(k)}\| \le G(k), \mu(r) = \min_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k}, \|\pi_r^{(k)}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix}^{(k)} \right\| \le r^k \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|,$$

Определив для значений $0 \le r \le m$ функции (см. (3.11))

$$\phi_r(t) \equiv \frac{\mu(m)}{2\varpi}\pi_r(t) \le \frac{\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)}\pi_r(t) = \frac{\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)} \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_r^c(t) \\ \phi_r^s(t) \end{pmatrix}$$

и учитывая, что $\gamma_\alpha(m) \le \varpi$ получим

$$\begin{aligned} \|\phi_r^{(k)}(t)\| &= \frac{\mu(m)}{2\varpi}\|\pi_r^{(k)}(t)\| \le \frac{\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)}\|\pi_r^{(k)}(t)\| \le \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)} \cdot \frac{r^k}{G(k)} \\ &\le \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)} \cdot \left(\min_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k} \right)^{-1} = \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma_\alpha(m)} \cdot \Big(\mu(r) \Big)^{-1} \\ &\le \frac{G(k)}{2\gamma_\alpha(m)} \cdot \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \le \frac{G(k)}{2} < G(k), \quad \forall k \ge 0. \end{aligned}$$

Поскольку все функции $\phi_r(t)$ линейно независимы и принадлежат $\widetilde{K}_G^\infty$, их линейная комбинация $\omega(t) = \sum\limits_{r=0}^{m} \Big(\xi_r \phi_r^c(t) + \eta_r \phi_r^s(t) \Big)$ при $|\xi_r|, |\eta_r| \le 1$ также для всех $k \ge 0$ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$:

$$\|\omega^{(k)}(t)\| \le \sum_{r=0}^{m} \Big(|\xi_r| \|\phi_r^{c(k)}(t)\| + |\eta_r| \|\phi_r^{s(k)}(t)\| \Big) \le \frac{G(k)}{\gamma_\alpha(m)} \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \le G(k).$$

В компакте $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{G}_\alpha^\infty$ определим семейство функций (см. [6]):

$$Q^{2m+1} = \left\{ \omega(t) = \sum_{r=0}^{m} \Big(\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt \Big) : |\xi_r|, |\eta_r| \le \frac{\mu(m)}{2\varpi}, r = 0, 1, \dots, m \right\}, \tag{3.13}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m; \eta_1, \ldots, \eta_m$ — вещественные числа.

Пусть $|\xi|_\infty = \max\big\{|\xi_0|/2, |\xi_1|, \ldots, |\xi_m|\big\}$, $|\eta|_\infty = \max\big\{|\eta_1|, |\eta_2|, \ldots, |\eta_m|\big\}$.

Куб

$$I^{2m+1} = \Big\{\zeta \in R^{2m+1} : |\zeta_r| \le \frac{\mu(m)}{2\varpi}, r = 0, 1, \ldots, 2m\Big\}$$

топологической размерности $2m+1$ и длиной ребра $d = \frac{\mu(m)}{\varpi}$ линейно и гомеоморфно с не уменьшением расстояния (т.е. изометрично (см. [4, гл. 3, § 7, предл. 3]) вкладывается в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, и его образом является множество (3.13), поскольку

$$|\zeta|_\infty \equiv \max\Big(|\xi|_\infty, |\eta|_\infty\Big) \le \sqrt{2} \cdot \Big\|\xi_0/2 + \sum_{r=1}^{m}\Big(\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt\Big)\Big\|. \qquad (*)$$

Оценка (*) следует из неравенства Бесселя (см. [4, гл. 2, § 3, п. 1]):

$$|\zeta|_\infty^2 \equiv \left(\max\Big\{\frac{|\xi_0|}{2}, |\xi_1|, \ldots, |\xi_m|, |\eta|_\infty\Big\}\right)^2 \le \left(\max\Big\{\frac{|\xi_0|}{\sqrt{2}}, |\xi_1|, \ldots, |\xi_m|, |\eta|_\infty\Big\}\right)^2$$

$$\le \overbrace{\frac{\xi_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{m}\big(\xi_r^2 + \eta_r^2\big) \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega^2(t)\,dt} \le 2\max_{t\in[0,2\pi]} |\omega(t)|^2 = 2\|\omega\|^2.$$

В силу всего сказанному выше и лемме 1 получаем такую оценку снизу:

$$\alpha_{2m}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \ge \alpha_{2m}\big(Q^{2m+1}, C\big) \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha_{2m}\big(I^{2m+1}, l_\infty^{2m+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu(m)}{(2\varpi)}.$$

Теорема 1. *Компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{G}_\alpha^\infty$ бесконечно гладких периодических функций Жевре класса $\alpha \ge 1$ и мажорантой $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$ имеет следующую (при $m \to \infty$) асимптотику александровского m-поперечника (подробности вычислений см. в* [5]*):*

$$c \cdot ae^{-\varrho \sqrt[\alpha]{m}} \le \alpha_{2m}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \le \alpha_{2m-1}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \le c \cdot be^{-\varrho \sqrt[\alpha]{m-1}}.$$

Здесь

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2 + (e\sqrt[\alpha]{A})}, \quad b = \frac{\pi}{2} \cdot e^{0.5\alpha(e\sqrt[\alpha]{A})}, \quad \varrho = \alpha/(e\sqrt[\alpha]{A})$$

— вещественные постоянные.

Список литературы

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms — part 1, 2 //*Computer methods in applied mechanics and engineering.* NY:North-Holland Publishing Company. 1976. V. 7. P. 47–73, P. 135–152.

2. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые алгоритмы численного решения эллиптических краевых задач в гладких осесимметричных областях //*Мат. труды.* 2022. Т. 25. № 1. С. 3–50;
DOI: 10.33048/mattrudy.2022.25.101

3. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики.* М.; Наука, 1977.

4. *Бабенко К. И. Основы численного анализа.* М. Наука. 1986. (2-е издание М.- Ижевск. РХД. 2002.)

5. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на конечном отрезке (к феномену ненасыщаемости численных методов) //*Сиб. мат. журн.* 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.

6. *Белых В. Н.* Оценки александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких на конечном отрезке функций //*Сиб. мат. журн.* 2024. Т. 65. № 1. С. 1–10;
DOI 10.33048/smzh.2024.65.101

7. *Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ (1976).

8. *Aleksandroff P. S.* Uber die Urysonsche Konstanten //*Fund. Math.*. 1933. 20. 140-150.

9. *Волков Ю. С.* Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара //*Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 495. С. 29–32;
DOI: 10.31857/S2686954320060193

10. *Волков Ю. С.* Эффективное вычисление констант Фавара и их связь с многочленами и числами Эйлера //*Сибирские электронные математические известия.* 2020. Т. 17. С. 1921–1942;
DOI:10.33048/semi.2020.17.129

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 5-18
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 5-18

References

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms — part 1, 2 //*Computer methods in applied mechanics and engineering.* 1976. V. 7. P. 47–73, P. 135–152. North-Holland Publishing Company.

2. *Belykh V. N.* Unsaturated algorithms for the numerical solution of elliptic boundary value problems in smooth axisymmetric domains //*Siberian Advances in Mathematics.* 2022. V. 32. N. 3. P. 157–185;
DOI: 10.1134/S1055134422030014

3. *Anuchina N. N., Babenko K. I., Godunov S. K., et al., Theoretical Foundations and Design of Numerical Algorithms for Problems of Mathematical Physics*, Ed. by K. I. Babenko (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

4. *Babenko K. I. Foundations of numerical analysis*, Nauka, Moscow 1986; 2nd ed., Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, Moscow-Izhevsk 2002. [in Russian].

5. *Belykh V. N.* On the best approximation properties of C^∞-smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods), *Sib. Math. J.*2005. V. 46. N. 3. P. 373–385.

6. *Belykh V. N.* Estimates of the Alexandrov's n-width of a the compact of C^∞-smooth functions on a finite segment //*Sib. Math. J.*, 2024; V. 65. N. 1. P. 3–14.
DOI: 10.1134/S0037446624010014

7. *Tikhomirov V. M. Some Problems of Approximation Theory.* Moscow University. Moscow (1976) [in Russian].

8. *Aleksandroff P. S.* Uber die Urysonsche Konstanten //*Fund. Math.* 1933. 20. 140–150.

9. *Volkov Yu. S.* One problem of extremal functional interpolation and the Favard constants //*Dokl. Math.* 2020. V. 102, No. 3. P. 474–477;
DOI:10.1134/S1064562420060216

10. *Volkov Yu. S.* Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers //*SEMI.* T. 17. C. 1921–1942;
DOI:10.33048/semi.2020.17.129

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 4, С. 5-18
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 4, P. 5-18

Информация об авторе

Владимир Никитич Белых, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник

AuthorID: 7780

Scopus Author ID 700 404 6309

Author Information

Vladimir N. Belykh, Doctor of Mathematics, Senior Reseacher

AuthorID: 7780

Scopus Author ID 700 404 6309

Статья поступила в редакцию 17.09.2024;
одобрена после рецензирования 23.09.2024; принята к публикации 30.10.2024

The article was submitted 17.09.2024;
approved after reviewing 23.09.2024; accepted for publication 30.10.2024