

ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ И ТРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ МОДУЛЯРНОЙ КАТЕГОРИИ С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Филипп Глебович Кораблёв

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского
отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

korablev@csu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8510-0040>

Аннотация

В работе строится модулярная категория \mathfrak{E} , содержащая ровно два простых объекта. С помощью специальной техники из неё извлекаются два инварианта: комплексно значный инвариант типа Решетихина – Тураева rt_ε неориентированных зацеплений в трёхмерной сфере и трёхмерных многообразий, и вещественно значный инвариант типа Тураева – Виро tv_ε трёхмерных многообразий. Значения этих двух инвариантов трёхмерных многообразий связаны соотношением $|rt_\varepsilon|^2 \cdot (\varepsilon + 2) = tv_\varepsilon$, где ε — корень уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Доказывается, что инвариант tv_ε в точности совпадает с ε -инвариантом трёхмерных многообразий.

Ключевые слова и фразы

модулярная категория, инварианты типа Решетихина – Тураева, инварианты типа Тураева – Виро, ε -инвариант.

Для цитирования

Кораблёв Ф. Г. Инварианты узлов и трёхмерных многообразий, возникающие из модулярной категории с двумя простыми объектами // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 39-93. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-39-93

INVARIANTS OF LINKS AND 3-MANIFOLDS FROM THE MODULAR CATEGORY WITH TWO SIMPLE OBJECTS

Philipp G. Korablev

Chelyabinsk state university, Chelyabinsk, Russia

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russia

korablev@csu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8510-0040>

Abstract

In this paper we construct a modular category \mathfrak{E} containing exactly two simple objects. Using a special technique, two invariants are extracted from it: a complex-valued invariant of Reshetikhin – Turaev type rt_ε of unoriented links in the 3-sphere and of 3-manifolds, and a real-valued invariant of Turaev – Viro type tv_ε of 3-manifolds. The values of these two invariants of 3-manifolds are related by the equality $|rt_\varepsilon|^2 \cdot (\varepsilon + 2) = tv_\varepsilon$, where ε is the root of the equation $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. It is proved that the tv_ε invariant exactly coincides with the ε -invariant of 3-manifolds.

Keywords

modular category, Reshetikhin – Turaev type invariant, Turaev – Viro type invariant, ε -invariant.

For citation

Korablev P. G. Invariants of links and 3-manifolds from the modular category with two simple objects // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 39-93. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-39-93

§ 1. Введение, предварительные сведения и постановка задачи

Настоящая статья посвящена реализации одного подхода к построению квантовых инвариантов классических зацеплений и замкнутых трёхмерных многообразий. Изначально этот подход был предложен в статье [1], его более развёрнутое изложение представлено в книгах [2, 3] (также см. [4]). Суть подхода состоит в том, что из каждой модулярной категории \mathcal{V} с помощью специальной техники можно извлечь два инварианта

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 39-93

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 39-93

$\tau_{\mathcal{V}}(M)$ и $|M|_{\mathcal{V}}$ замкнутого ориентированного трёхмерного многообразия M . Значения этих двух инвариантов связаны между собой соотношением $|M|_{\mathcal{V}} = \tau_{\mathcal{V}}(M) \cdot \tau_{\mathcal{V}}(-M)$, где $-M$ — многообразие с противоположной ориентацией.

Изначально конструкция инварианта $\tau_{\mathcal{V}}$ была дана в работе Н. Решетихина и В. Тураева [5] для случая категории неприводимых представлений квантовой группы $U_q(sl_2)$. Поэтому все инварианты, которые получают из других модулярных категорий, естественно называть инвариантами типа Решетихина – Тураева. Аналогичным образом, первый раз конструкция инварианта $|M|_{\mathcal{V}}$ была предложена в работе В. Тураева и О. Виро [6] с использованием q -6j-символов для квантовой группы $U_q(sl_2)$. Поэтому все инварианты $|M|_{\mathcal{V}}$, возникающие из модулярных категорий, естественно называть инвариантами типа Тураева – Виро.

Одна из задач состоит в том, чтобы изучать свойства инвариантов типа Решетихина – Тураева и Тураева – Виро для наиболее простых модулярных категорий. Довольно удобным для этих целей классом категорий являются фьюжн категории (см. [7, 8, 9]). В работе [10] получена полная классификация фьюжн категорий, являющихся модулярными, ранг (то есть число классов изоморфности простых объектов) которых не превосходит четырёх. Эти категории можно использовать для построения простейших инвариантов типа Решетихина – Тураева и Тураева – Виро.

В настоящей статье центральную роль играет категория \mathfrak{E} . Эта категория хорошо известна. Например, она служит основанием анионной модели Фибоначчи квантовых вычислений (см. [11, 12]). Эта категория довольно часто возникает как один из простейших нетривиальных примеров фьюжн категории с двумя простыми объектами (см. [13]). Одна из особенностей категории \mathfrak{E} состоит в том, что она содержит нетривиальные ассоциаторы. Не смотря на «теорему когерентности» (см. [14]), которая утверждает, что любая моноидальная категория эквивалентна строгой моноидальной категории (то есть категории, в которой все ассоциаторы тривиальны), категория \mathfrak{E} оказывается удобной для проведения конкретных вычислений. Инвариант типа Решетихина – Тураева, возникающий из категории \mathfrak{E} , обозначается rt_{ε} , а инвариант типа Тураева – Виро — tv_{ε} . Значения обоих инвариантов зависят от параметра ε , который может быть выбран равным любому корню уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

Константа ε , используемая для построения инвариантов rt_{ε} и tv_{ε} , участвует в определении ε -инварианта для трёхмерных многообразий (см. [15]). Этот инвариант можно определить несколькими эквивалентными способами. Один из них состоит в том, чтобы определить его как гомологически тривиальную часть классического инварианта Тураева – Виро порядка 5. ε -инвариант играет важную роль в теории сложности трёх-

мерных многообразий (см. [16]). Например, с помощью этого инварианта удалось вычислить явные значения сложности для нескольких бесконечных серий трёхмерных многообразий (см. [17, 18]).

В настоящей статье доказывается, что значение ε -инварианта замкнутых трёхмерных многообразий совпадает с инвариантом tv_ε (теорема 13). Так как инвариант rt_ε сильнее инварианта tv_ε (пример 10), то его можно рассматривать как более сильную версию ε -инварианта. Так как ε -инвариант является частью одного из классических инвариантов Тураева – Виро, то вполне естественно, что инвариант rt_ε также является частью одного из классических инвариантов Решетихина – Тураева (см. [19]). Инвариант rt_ε не является новым, однако используемый подход позволяет описать его чисто комбинаторными методами без применения теории представлений квантовых групп. При описании категории \mathfrak{E} и инвариантов rt_ε и tv_ε в основном используется терминология и обозначения из книги [2].

Структура статьи такова. В разделе даётся подробное описание категории \mathfrak{E} . Близкое описание этой категории, использующее другую точку зрения, дано в [12]. Не смотря на то, что конструкция категории \mathfrak{E} хорошо известна, её описание даётся по нескольким причинам. Во-первых, чтобы зафиксировать обозначения и разработать диаграммный подход к изображению морфизмов категории \mathfrak{E} . Во-вторых, чтобы зафиксировать одну из эквивалентных точек зрения на категорию \mathfrak{E} . В-третьих, подобное описание делает текст более самостоятельным.

В разделе 2.4.2 определяется инвариант rt_ε неориентированных зацеплений и трёхмерных многообразий, вычисляется несколько примеров. В частности, выводится явная формула значений инварианта rt_ε для обобщённых зацеплений Хопфа и для линзовых пространств.

В разделе 3.6 доказывается, что инвариант типа Тураева – Виро tv_ε , возникающий из категории \mathfrak{E} , совпадает с ε -инвариантом замкнутых трёхмерных многообразий.

§ 2. Категория \mathfrak{E}

В этом параграфе даётся прямое комбинаторное описание категории \mathfrak{E} .

2.1 Объекты и морфизмы

2.1.1 Объекты

Пусть $I = \{1, \mathbf{A}\}$ — множество мощности 2. Элементы этого множества играют роль простых объектов категории \mathfrak{E} . Любой объект X этой категории \mathfrak{E} — это конечная упорядоченная последовательность (x_1, \dots, x_n) ,

где $x_i \in I$ для всех $i = 1, \dots, n$. Во избежание излишних нагромождений будем вместо объекта (x) писать просто x . Диаграмма каждого объекта изображается в виде столбца, разбитого на ячейки, каждая ячейка содержит либо символ \mathbf{A} , либо символ $\mathbf{1}$ (рис. 1). Столбец читается сверху вниз.

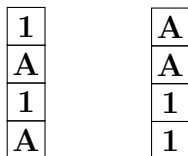


Рис. 1: Диаграммы объектов $(\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$ (слева) и $(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ (справа)

Для объекта $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in I$, обозначим $|X|_{\mathbf{1}}$ число компонент, равных $\mathbf{1}$, и $|X|_{\mathbf{A}}$ число компонент, равных \mathbf{A} , в X . Ясно, что $|X|_{\mathbf{1}} + |X|_{\mathbf{A}} = n$.

2.1.2 Морфизмы

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, \dots, y_m)$, $x_i, y_j \in I$ — два объекта. Каждый морфизм $f \in Hom(X, Y)$ из X в Y в категории \mathfrak{E} — это такое отображение $(x_i, y_j) \mapsto a_i^j \in \mathbb{C}$, что если $x_i \neq y_j$, то $a_i^j = 0$, а если $x_i = y_j$, то значение a_i^j может быть произвольным комплексным числом.

Диаграмма каждого морфизма представляет собой набор стрелок с сопоставленными им комплексными числами, соединяющих ячейки диаграммы первого объекта с ячейками диаграммы второго объекта. Удобно на диаграмме не изображать стрелки, которым сопоставлено число $0 \in \mathbb{C}$. Пример диаграммы одного морфизма изображён на рисунке 2.

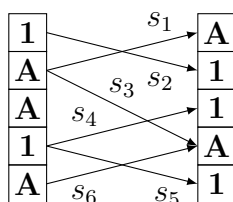


Рис. 2: Диаграмма морфизма между объектами $(\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$ и $(\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{1})$

Пусть $f \in Hom(X, Y)$ — морфизм из объекта $X = (x_1, \dots, x_n)$ в объект $Y = (y_1, \dots, y_m)$ категории \mathfrak{E} . Тогда каждому такому морфизму естественным образом можно сопоставить две матрицы. Первая матрица $[f]_{\mathbf{1}}$

имеет размер $|Y|_{\mathbf{1}} \times |X|_{\mathbf{1}}$, а вторая матрица $[f]_{\mathbf{A}}$ имеет размер $|Y|_{\mathbf{A}} \times |X|_{\mathbf{A}}$. Столбцы матрицы $[f]_{\mathbf{1}}$ находятся в биективном соответствии с компонентами объекта X , равными $\mathbf{1}$. Строки матрицы $[f]_{\mathbf{1}}$ находятся в биективном соответствии с компонентами объекта Y , равными $\mathbf{1}$. Элемент a_i^j матрицы $[f]_{\mathbf{1}}$ равен значению, сопоставленного стрелке диаграммы морфизма f , соединяющей i -ую ячейку с символом $\mathbf{1}$ диаграммы объекта X с j -ой ячейкой с символом $\mathbf{1}$ диаграммы объекта Y . Матрица $[f]_{\mathbf{A}}$ строится аналогичным образом. Всё отличие состоит в том, что её элементы — это значения, сопоставленные стрелкам, соединяющим ячейки с символом \mathbf{A} .

Например, для морфизма f , изображённого на рисунке 2, эти матрицы следующие:

$$[f]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_4 \\ 0 & s_5 \end{pmatrix} \text{ и } [f]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & s_6 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Композиция морфизмов

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ и $Z = (z_1, \dots, z_l)$ — три объекта категории \mathfrak{E} , и пусть $f \in \text{Hom}(X, Y)$ — морфизм из X в Y , $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ — морфизм из Y в Z . Тогда композицией $f \circ g$ является морфизм из X в Z , который задаётся следующими двумя матрицами:

$$[f \circ g]_{\mathbf{1}} = [g]_{\mathbf{1}} \cdot [f]_{\mathbf{1}} \text{ и } [f \circ g]_{\mathbf{A}} = [g]_{\mathbf{A}} \cdot [f]_{\mathbf{A}}.$$

Композиция $f \circ g$ записывается слева направо: морфизм f является первым, а морфизм g — вторым.

Композицию $f \circ g$ можно определить, используя диаграммы. Число, сопоставленное стрелке, соединяющей ячейку объекта X с символом x_i и ячейку объекта Z с символом z_k , вычисляется следующим образом. Сначала надо найти все ориентированные пути из ячейки x_i в ячейку z_k на диаграммах морфизмов f и g . Затем для каждого такого пути вычислить произведение значений, сопоставленных его стрелкам. После этого сложить все вычисленные произведения (рис. 3).

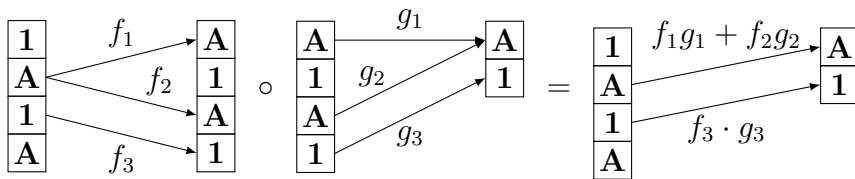


Рис. 3: Композиция двух морфизмов

2.1.4 Тожественные морфизмы

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ — объект категории \mathfrak{C} . Тожественный морфизм id_X задаётся следующими двумя матрицами: $[id_X]_{\mathbf{1}}$ — это единичная матрица размера $|X|_{\mathbf{1}}$, а $[id_X]_{\mathbf{A}}$ — это единичная матрица размера $|X|_{\mathbf{A}}$. Диаграмма тождественного морфизма id_X содержит n параллельных стрелок, каждой из которых сопоставлено число 1 (рис. 4).

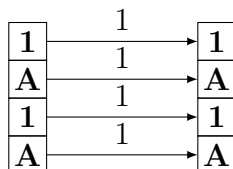


Рис. 4: Тожественный морфизм id_X для объекта $X = (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$

Теорема 1. *Определённые выше множество объектов и множество морфизмов действительно образуют категорию.*

Доказательство. Сначала надо проверить, что композиция морфизмов ассоциативна, то есть для любых четырёх объектов X, Y, Z, W и трёх морфизмов $f \in Hom(X, Y)$, $g \in Hom(Y, Z)$ и $h \in Hom(Z, W)$:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Далее необходимо проверить, что тождественный морфизм является нейтральным элементом относительно операции композиции, то есть для любых двух объектов X, Y и морфизма $f \in Hom(X, Y)$:

$$id_X \circ f = f \circ id_Y = f.$$

Оба требуемых утверждения очевидны. Первое следует из ассоциативности матричного умножения, а второе — из правила умножения на единичную матрицу. \square

2.2 Моноидальная структура

Этот раздел посвящён описанию моноидальной структуры на категории \mathfrak{C} . Для этого достаточно, во-первых, определить операцию тензорного произведения объектов и морфизмов. Во-вторых, задать семейство изоморфизмов $\alpha_{X,Y,Z} \in Hom((X \otimes Y) \otimes Z, X \otimes (Y \otimes Z))$, определённых для

каждой тройки объектов X, Y, Z категории \mathfrak{E} . Эти изоморфизмы называются ассоциаторами. В-третьих, определить единичный объект $\mathbb{1}$, нейтральный относительно операции тензорного произведения объектов. В-четвёртых, задать два семейства изоморфизмов $l_X \in \text{Hom}(\mathbb{1} \otimes X, X)$ и $r_X \in \text{Hom}(X \otimes \mathbb{1}, X)$, определённых для каждого объекта X категории \mathfrak{E} . Эти изоморфизмы называются левыми и правыми единичными изоморфизмами. Категория \mathfrak{E} оказывается не строгой, так как ассоциаторы в ней нетривиальны.

2.2.1 Тензорное произведение объектов

Пусть $X, Y \in I$ — простые объекты категории \mathfrak{E} . Определим их тензорное произведение $X \otimes Y$ следующим образом:

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{A}).$$

Продолжим это тензорное произведение на множество всех объектов категории \mathfrak{E} следующим образом:

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_n) \otimes (y_1, \dots, y_m) \\ &= (x_1 \otimes y_1, \dots, x_1 \otimes y_m, x_2 \otimes y_1, \dots, x_2 \otimes y_m, \dots, x_n \otimes y_1, \dots, x_n \otimes y_m), \end{aligned}$$

где $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in I$ — простые объекты. В случае, если $x_i = y_j = \mathbf{A}$, то на месте вхождения $x_i \otimes y_j$ в результате тензорного произведения последовательно написаны две компоненты $\mathbf{1}$ и \mathbf{A} .

Пример 1. $X \otimes (Y \otimes Z)$ для $X = (\mathbf{A}, \mathbf{1})$, $Y = \mathbf{A}$ и $Z = (\mathbf{1}, \mathbf{A})$:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A})) = (\mathbf{A}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}) = (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}).$$

Замечание 1. В общем случае $(X \otimes Y) \otimes Z \neq X \otimes (Y \otimes Z)$, но, конечно же $|(X \otimes Y) \otimes Z|_{\mathbf{1}} = |X \otimes (Y \otimes Z)|_{\mathbf{1}}$ и $|(X \otimes Y) \otimes Z|_{\mathbf{A}} = |X \otimes (Y \otimes Z)|_{\mathbf{A}}$. Фактически объекты $(X \otimes Y) \otimes Z$ и $X \otimes (Y \otimes Z)$ различаются лишь порядком компонент.

2.2.2 Тензорное произведение морфизмов

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$, $Z = (z_1, \dots, z_p)$ и $T = (t_1, \dots, t_q)$ — объекты категории \mathfrak{E} , где все $x_i, y_j, z_r, t_s \in I$ — простые объекты. Пусть $f \in \text{Hom}(X, Y)$ — морфизм из X в Y , и $g \in \text{Hom}(Z, T)$ — морфизм из Z в T . Наконец, пусть морфизм f задаётся значениями $f(x_i, y_j) = f_i^j \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, и пусть морфизм g задаётся значениями $g(z_r, t_s) = g_r^s \in \mathbb{C}$, $r \in \{1, \dots, p\}$, $s \in \{1, \dots, q\}$.

Определим тензорное произведение морфизмов $f \otimes g \in \text{Hom}(X \otimes Z, Y \otimes T)$ следующим образом. Рассмотрим компоненты $x_i \otimes z_r$ объекта $X \otimes Z$ и $y_j \otimes t_s$ объекта $Y \otimes T$. Каждая из них является либо одним простым объектом (если хотя бы один из двух простых объектов в произведении совпадает с $\mathbf{1}$), либо двумя (если оба простых объекта в произведении совпадают с \mathbf{A}). Если $x_i \neq y_j$ или $z_r \neq t_s$, то положим значение морфизма $f \otimes g$, которое сопоставляется всем компонентам $x_i \otimes z_r$ и $y_j \otimes t_s$, равным нулю. Если $x_i = y_j$ и $z_r = t_s$, то в этом случае $x_i \otimes z_r = y_j \otimes t_s$. Если либо x_i , либо z_r совпадает с $\mathbf{1}$, то положим $f \otimes g(x_i \otimes z_r, y_j \otimes t_s) = f_i^j \cdot g_r^s \in \mathbb{C}$. Если $x_i = z_r = \mathbf{A}$ и $y_j = t_s = \mathbf{A}$, то $x_i \otimes z_r = y_j \otimes t_s = (\mathbf{1}, \mathbf{A})$. В этом случае положим $f \otimes g(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = f \otimes g(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = f_i^j \cdot g_r^s \in \mathbb{C}$, и $f \otimes g(\mathbf{1}, \mathbf{A}) = f \otimes g(\mathbf{A}, \mathbf{1}) = 0 \in \mathbb{C}$.

Тензорное произведение морфизмов можно задать, используя диаграммы. Нарисуем диаграмму первого морфизма $f \in \text{Hom}(X, Y)$ сверху, а второго морфизма $g \in \text{Hom}(Z, T)$ снизу (рис. 5 слева). Выберем ненулевую стрелку на диаграмме морфизма f и ненулевую стрелку на диаграмме морфизма g . Пусть этим двум стрелкам сопоставлены значения f_i^j и g_r^s соответственно. Результат тензорного произведения выбранных двух стрелок изображён на рисунке 5 в центре и справа. Выполняем это действие для всех пар стрелок на диаграммах морфизмов f и g .

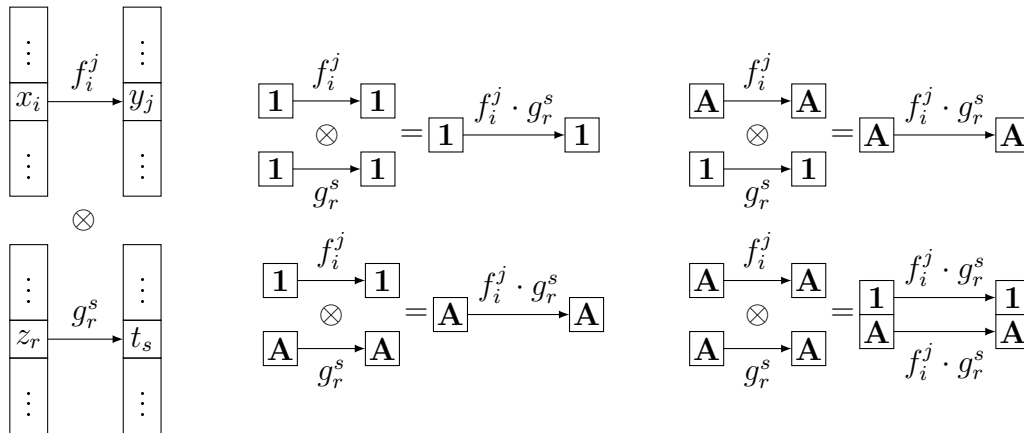


Рис. 5: Диаграмма тензорного произведения двух морфизмов (слева), результат тензорного произведения морфизмов между простыми объектами (справа)

Пример 2. Пусть морфизм $f \in \text{Hom}((\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{1}, \mathbf{A}))$ задан матрицами

$$[f]_{\mathbf{1}} = (f_2), [f]_{\mathbf{A}} = (f_1 \ 0),$$

а морфизм $g \in \text{Hom}((\mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{1}, \mathbf{A}))$ задан матрицами

$$[g]_{\mathbf{1}} = (g_1), [g]_{\mathbf{A}} = (g_2).$$

Диаграммы этих морфизмов изображены на рисунке 6 слева.

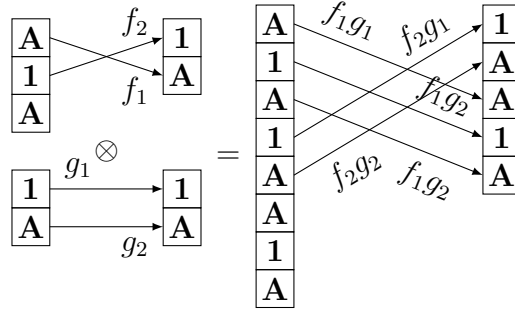


Рис. 6: Пример тензорного произведения двух морфизмов

Тензорное произведение $f \otimes g$ является морфизмом из объекта

$$(\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$$

в объект $(\mathbf{1}, \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A}) = (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$. Этот морфизм задаётся матрицами

$$[f \otimes g]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 0 & f_2g_1 & 0 \\ f_1g_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [f \otimes g]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2g_2 & 0 & 0 \\ f_1g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1g_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диаграмма морфизма $f \otimes g$ изображена на рисунке 6 справа.

Замечание 2. Как показывает пример 2, если f, g — два морфизма, и $[f]_{\mathbf{1}}, [f]_{\mathbf{A}}, [g]_{\mathbf{1}}, [g]_{\mathbf{A}}$ — задающие их матрицы, то тогда матрицы $[f \otimes g]_{\mathbf{1}}$ и $[f \otimes g]_{\mathbf{A}}$, задающие морфизм $f \otimes g$, не являются обычными тензорными произведениями матриц $[f]_{\mathbf{1}}, [f]_{\mathbf{A}}, [g]_{\mathbf{1}}, [g]_{\mathbf{A}}$. Матрица $[f \otimes g]_{\mathbf{1}}$ составляется из матрицы $[f]_{\mathbf{1}} \otimes [g]_{\mathbf{1}}$ и подматрицы матрицы $[f]_{\mathbf{A}} \otimes [g]_{\mathbf{A}}$. Матрица $[f \otimes g]_{\mathbf{A}}$ составляется из матриц $[f]_{\mathbf{1}} \otimes [g]_{\mathbf{A}}, [f]_{\mathbf{A}} \otimes [g]_{\mathbf{1}}$ и подматрицы матрицы $[f]_{\mathbf{A}} \otimes [g]_{\mathbf{A}}$.

Лемма 1. Пусть X, Y, Z, X', Y', Z' — объекты категории \mathfrak{E} , и пусть $f \in \text{Hom}(X, Y), g \in \text{Hom}(Y, Z), f' \in \text{Hom}(X', Y'), g' \in \text{Hom}(Y', Z')$ — морфизмы. Тогда

$$(f \otimes f') \circ (g \otimes g') = (f \circ g) \otimes (f' \circ g').$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы используя диаграммный язык задания морфизмов. Пусть $x = z \in I$ — ячейки диаграмм объектов X и Z соответственно, $y_1, \dots, y_n \in I$ — ячейки диаграммы объекта Y , соединённые либо с x , либо с z ненулевыми стрелками. Пусть для морфизма $f \in \text{Hom}(X, Y)$ этим стрелкам сопоставлены значения $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}$, а для морфизма $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ — значения $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{C}$ (рис. 7 слева).

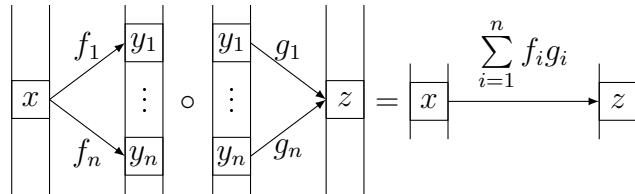


Рис. 7: Диаграммы морфизмов f и g (слева), и результат их композиции $f \circ g$ (справа)

Тогда на диаграмме морфизма $f \circ g \in \text{Hom}(X, Z)$ ячейка x соединяется с ячейкой z стрелкой, которой сопоставлено значение $\sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i$ (рис. 7 справа).

Для морфизмов $f' \in \text{Hom}(X', Y')$ и $g' \in \text{Hom}(Y', Z')$ используем аналогичные обозначения: $x' = z' \in I$ — две ячейки диаграмм объектов X' и Z' соответственно, $y'_1, \dots, y'_m \in I$ — ячейки диаграммы объекта Y' , соединённые с x' стрелками, которым сопоставлены значения $f'_1, \dots, f'_m \in \mathbb{C}$, и с z' стрелками, которым сопоставлены значения $g'_1, \dots, g'_m \in \mathbb{C}$. Тогда на диаграмме для композиции $f' \circ g' \in \text{Hom}(X', Z')$ ячейка x' соединяется с ячейкой z' стрелкой, которой сопоставлено значение $\sum_{j=1}^m f'_j \cdot g'_j$.

В результате на диаграмме морфизма $(f \circ g) \otimes (f' \circ g')$ (рис. 8) ячейки, соответствующие произведению $x \otimes x'$, соединены с ячейками, соответствующими произведению $z \otimes z'$, стрелками, которым сопоставлено значение

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i \cdot \sum_{j=1}^m f'_j g'_j.$$

Если $x = x' = z = z' = \mathbf{A}$, то $x \otimes x' = z \otimes z' = (\mathbf{1}, \mathbf{A})$ и на диаграмме им соответствуют две параллельные стрелки с одним и тем же значением. В остальных случаях $x \otimes x' = z \otimes z' \in I$ и на диаграмме им соответствует одна стрелка.

На диаграмме морфизма $f \otimes f' \in \text{Hom}(X \otimes X', Y \otimes Y')$ (рис. 9 слева) ячейки, соответствующие произведению $x \otimes x'$, соединены с ячейками,

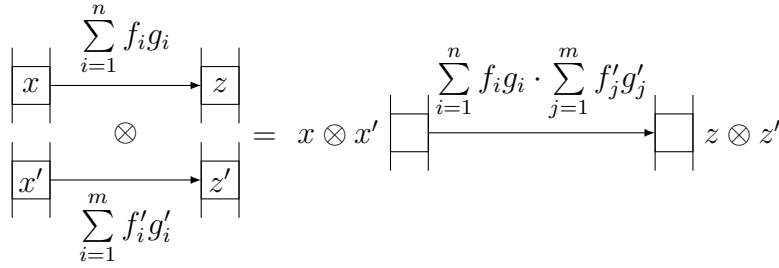


Рис. 8: результат произведения $(f \circ g) \otimes (f' \circ g')$

соответствующими произведениям

$$y_1 \otimes y'_1, \dots, y_1 \otimes y'_m, y_2 \otimes y'_1, \dots, y_2 \otimes y'_m, \dots, y_n \otimes y'_1, \dots, y_n \otimes y'_m,$$

стрелками, которым сопоставлены значения

$$f_1 f'_1, \dots, f_1 f'_m, f_2 f'_1, \dots, f_2 f'_m, \dots, f_n f'_1, \dots, f_n f'_m.$$

Как и ранее, если $y_i = y'_j = \mathbf{A}$, то значение $f_i f'_j$ сопоставлено двум параллельным стрелкам, соединяющим первые компоненты произведений $x \otimes x'$ и $y_i \otimes y'_j$, и их вторые компоненты.

Аналогичным образом устроена диаграмма морфизма $g \otimes g'$. На ней стрелкам, соединяющим ячейки $y_i \otimes y'_j$ с $z \otimes z'$, сопоставлены значения $g_i g'_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ (рис. 9 справа).

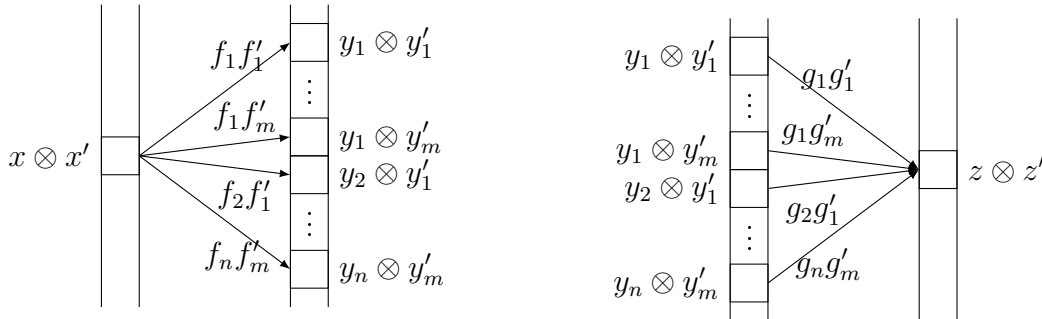


Рис. 9: диаграмма морфизма $f \otimes f'$ (слева) и $g \otimes g'$ (справа)

Тогда на диаграмме морфизма $(f \otimes f') \circ (g \otimes g')$ ячейки, соответствующие произведению $x \otimes x'$, соединены с ячейками, соответствующими произведению $z \otimes z'$, стрелками, которым сопоставлено значение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_i f'_j \cdot g_i g'_j.$$

Справедливость леммы следует из того, что

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i \cdot \sum_{j=1}^m f'_j g'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_i f'_j \cdot g_i g'_j.$$

□

Лемма 2. Пусть X, Y — объекты категории \mathfrak{E} . Тогда $id_{X \otimes Y} = id_X \otimes id_Y$.

Доказательство. Утверждение очевидно. □

2.2.3 Ассоциаторы

Зададим семейство изоморфизмов $\alpha_{X,Y,Z} \in \text{Hom}((X \otimes Y) \otimes Z, X \otimes (Y \otimes Z))$, определённых для каждой тройки объектов X, Y, Z категории \mathfrak{E} . Сначала рассмотрим случай, когда все три объекта X, Y, Z являются простыми. Если хотя бы один из них совпадает с $\mathbf{1}$, то положим

$$\alpha_{X,Y,Z} = id_{(X \otimes Y) \otimes Z}.$$

Если $X = Y = Z = \mathbf{A}$, то определим $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in \text{Hom}((\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ с помощью матриц

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (1), [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где ε — это любой из корней уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$, и $x \in \mathbb{C}$ — произвольный ненулевой фиксированный комплексный параметр.

Замечание 3. Морфизм $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ является изоморфизмом. Обратный морфизм $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}^{-1} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})$ задаётся теми же самыми матрицами

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}^{-1}]_{\mathbf{1}} = (1), [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}^{-1}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Это следует из того, что

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Продолжим определение ассоциаторов $\alpha_{X,Y,Z} \in \text{Hom}((X \otimes Y) \otimes Z, X \otimes (Y \otimes Z))$ на все остальные тройки объектов X, Y, Z категории \mathfrak{E} следующим образом. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$, $Z = (z_1, \dots, z_l)$ — три произвольных объекта категории \mathfrak{E} . Каждое из произведений $(x_i \otimes y_j) \otimes z_k$ и $x_i \otimes (y_j \otimes z_k)$ в зависимости от того, какими простыми объектами являются $x_i, y_j, z_k \in I$, состоит из одной, двух или трёх компонент. Положим значение морфизма $\alpha_{X,Y,Z}$ на каждой паре этих компонент (первый элемент пары — компонента произведения $(x_i \otimes y_j) \otimes z_k$, а второй элемент — произведения $x_i \otimes (y_j \otimes z_k)$) равным значению морфизма α_{x_i, y_j, z_k} на этой же паре. Значение морфизма $\alpha_{X,Y,Z}$ на всех остальных парах компонент объектов $(X \otimes Y) \otimes Z$ и $X \otimes (Y \otimes Z)$ положим равным нулю.

Пример 3. Морфизм $\alpha_{(\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}, \mathbf{A}} \in \text{Hom}((\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ задаётся матрицами

$$[\alpha_{(\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}, \mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{(\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}, \mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Морфизм $\alpha_{\mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}} \in \text{Hom}((\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ определяется матрицами

$$[\alpha_{\mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A}), \mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Морфизм $\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A})} \in \text{Hom}((\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ определяется матрицами

$$[\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A})}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A})}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Опишем более подробно, как получается матрица $[\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A})}]_{\mathbf{A}}$. Ассоциатор $\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, (\mathbf{1}, \mathbf{A})}$ — это морфизм из объекта $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A})$ в объект $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A}))$. Будем подчёркивать компоненту произведения одной чертой, если она получается умножением на $\mathbf{1}$, и двумя чертами, если умножением на \mathbf{A} :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}}) = (\mathbf{1}, \mathbf{A}) \otimes (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}}) = (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}}).$$

Выпишем аналогичным образом компоненты второго объекта $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A}))$:

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}})) = \mathbf{A} \otimes (\underline{\mathbf{A}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{A}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}).$$

Итоговая матрица $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}}$ содержит в себе элементы, взятые из двух матриц. Из матрицы $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}}]_{\mathbf{A}}$, которая является единичной, элемент 1 соответствует второму символу \mathbf{A} первого объекта и первому символу \mathbf{A} второго объекта. Следовательно второй столбец матрицы $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}}$ содержит элемент 1 на первом месте, а все остальные его элементы равны нулю. Из матрицы $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$ берутся все четыре элемента. Они располагаются в первом и третьем столбце (потому что первый и третий символ \mathbf{A} в первом объекте дважды подчёркнут) и во второй и третьей строке (потому что во втором объекте дважды подчёркнут второй и третий символ \mathbf{A}).

Из определения следует, что если хотя бы один из объектов X, Y, Z равен $\mathbf{1}$, то $\alpha_{X,Y,Z} = id_{(X \otimes Y) \otimes Z}$.

Для изображения диаграмм ассоциаторов удобно использовать стрелки разных типов, соответствующие разным значениям. Стрелку со значением $\frac{1}{\varepsilon}$ будем рисовать пунктирной, со значением $\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ — точечной, со значением $\frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}$ — пунктирной серого цвета, со значением $-\frac{1}{\varepsilon}$ — сплошной серого цвета, и со значением 1 — сплошной чёрного цвета (рис. 10).

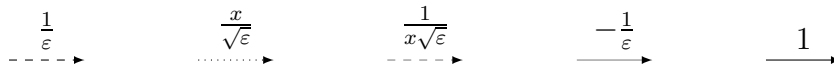


Рис. 10: Типы стрелок для обозначения разных значений

На рисунке 11 изображены диаграммы морфизмов $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$, $\alpha_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A},\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}$, а также произведений $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ и $id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$.

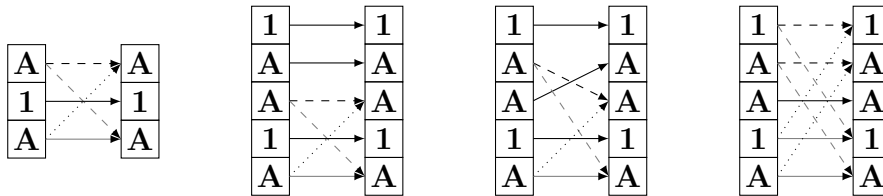


Рис. 11: Слева направо: диаграммы морфизмов $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ (первая), $\alpha_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A},\mathbf{A}}$ и $\alpha_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}$ (вторая), $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ (третья), $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ и $id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ (четвёртая)

Лемма 3. Семейство изоморфизмов $\alpha_{X,Y,Z} \in Hom((X \otimes Y) \otimes Z, X \otimes (Y \otimes Z))$, определённых для всех троек объектов X, Y, Z категории \mathfrak{E} , удовлетворяет пятичленному соотношению

$$(\alpha_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ \alpha_{X,Y \otimes Z,W} \circ (id_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}) = \alpha_{X \otimes Y,Z,W} \circ \alpha_{X,Y,Z \otimes W}$$

для любых объектов X, Y, Z, W категории \mathfrak{E} .

Замечание 4. Как уже отмечалось ранее, морфизмы в композиции записываются слева направо.

Утверждение леммы означает, что диаграмма, изображённая на рисунке 12, коммутативна.

$$\begin{array}{ccc}
 & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{\alpha_{X,Y \otimes Z,W}} X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \\
 \alpha_{X,Y,Z} \otimes id_W \nearrow & & \searrow id_X \otimes \alpha_{Y,Z,W} \\
 ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
 \alpha_{X \otimes Y,Z,W} \searrow & & \nearrow \alpha_{X,Y,Z \otimes W} \\
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) &
 \end{array}$$

Рис. 12: Диаграмма пятичленного соотношения для ассоциаторов

Доказательство. Рассмотрим сначала случай простых объектов $X, Y, Z, W \in I$. Если хотя бы один из них равен $\mathbf{1}$, то утверждение становится тривиальным. Рассмотрим случай, когда $X = Y = Z = W = \mathbf{A}$.

Диаграмма морфизма $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A},\mathbf{A}}$ изображена на рисунке 11 (вторая диаграмма слева). Диаграммы морфизмов $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ и $id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ изображены на том же рисунке 11 (самая правая диаграмма).

Обозначим морфизм в левой части из утверждения леммы через $L \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})))$. Этот морфизм задаётся матрицами

$$\begin{aligned}
 [L]_{\mathbf{1}} &= [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [L]_{\mathbf{A}} &= [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1 + \frac{1}{\varepsilon}) \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1 + \frac{1}{\varepsilon}) & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

При вычислении использовался тот факт, что $1 + \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$ и $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Далее, обозначим морфизм в правой части из утверждения леммы через $R \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})))$. Матрицы морфизмов

$\alpha_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A},\mathbf{A}}$ и $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ вычислены в примере 3. Тогда морфизм R задаётся матрицами

$$[R]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} [R]_{\mathbf{A}} &= [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что $[L]_{\mathbf{1}} = [R]_{\mathbf{1}}$ и $[L]_{\mathbf{A}} = [R]_{\mathbf{A}}$.

Справедливость леммы в общем случае, когда не все объекты X, Y, Z и W являются простыми, следует из того, как продолжают морфизмы ассоциаторов на не простые объекты. \square

Замечание 5. Ассоциаторы в категории \mathfrak{E} были заданы явным указанием матриц $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}}$ и $[\alpha_{\mathbf{A}\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$. Легко проверить, что такие ассоциаторы удовлетворяют пятичленному соотношению, однако возникает естественный вопрос: как эти матрицы были получены.

Для простоты положим все ассоциаторы $\alpha_{X,Y,Z}$ тождественными, если хотя бы один из объектов X, Y, Z равен $\mathbf{1}$. Пусть матрицы, задающие ассоциатор $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$, содержат неопределённые параметры

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (t), [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где $t, a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Пятичленное соотношение задаёт условия, которым должны удовлетворять эти неопределённые параметры. Непосредственно вычисляется, что

$$\begin{aligned} [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} &= [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} &= [\alpha_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \\ [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} &= [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}, \\ [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} &= [\alpha_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Из пятичленного соотношения следуют два матричных уравнения:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения сводятся к системе из двенадцати уравнений:

$$\begin{aligned} a^2 + b \cdot c \cdot t &= 1, & a^2 + b \cdot c \cdot d &= 0, & b \cdot d \cdot t &= b \cdot d, \\ a \cdot b + b \cdot d \cdot t &= 0, & b \cdot c \cdot t &= a, & a \cdot c + c \cdot d^2 &= c, \\ a \cdot c + c \cdot d \cdot t &= 0, & a \cdot b + b \cdot d^2 &= b, & c \cdot d \cdot t &= c \cdot d, \\ b \cdot c + d^2 \cdot t &= t^2, & a \cdot t^2 &= b \cdot c, & b \cdot c + d^3 &= d^2. \end{aligned}$$

Эта система имеет бесконечное семейство нетривиальных решений, параметризуемых одним комплексным параметром $x \neq 0$:

$$t = 1, a = \frac{1}{\varepsilon}, b = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, c = \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}, d = -\frac{1}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

Лемма 4. Пусть $f \in \text{Hom}(X_1, Y_1)$, $g \in \text{Hom}(X_2, Y_2)$ и $h \in \text{Hom}(X_3, Y_3)$ — три морфизма в категории \mathfrak{E} . Тогда

$$(f \otimes g) \otimes h \circ \alpha_{Y_1, Y_2, Y_3} = \alpha_{X_1, X_2, X_3} \circ f \otimes (g \otimes h).$$

Доказательство. Как и ранее, достаточно доказать утверждение леммы лишь для случая, когда $X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = X_3 = Y_3 = \mathbf{A}$. В этом случае каждый морфизм $f, g, h \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ задаётся одним числом, которое обозначим $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in \mathbb{C}$ соответственно.

Для каждого морфизма γ и числа $c \in \mathbb{C}$ обозначим $c \cdot \gamma$ морфизм, действующий так же, как γ , но у которого все значения умножены на c . Тогда

$$\begin{aligned} (f \otimes g) \otimes h \circ \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} &= (\hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}) \cdot \text{id}_{(\mathbf{A}, 1, \mathbf{A})} \circ \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} = \\ &= (\hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}) \cdot \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} = (\hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}) \cdot \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ \text{id}_{(\mathbf{A}, 1, \mathbf{A})} = \\ &= \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ (\hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}) \cdot \text{id}_{(\mathbf{A}, 1, \mathbf{A})} = \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ f \otimes (g \otimes h). \end{aligned}$$

□

2.2.4 Единичный объект

Положим $\mathbb{1} = \mathbf{1}$.

Лемма 5. Для любого объекта X категории \mathfrak{E} : $X \otimes \mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes X = X$.
Для любого морфизма $f \in \text{Hom}(X, Y)$: $f \otimes id_{\mathbb{1}} = id_{\mathbb{1}} \otimes f = f$.

Доказательство. Оба утверждения леммы очевидны. \square

2.2.5 Левые и правые единичные изоморфизмы

Положим изоморфизмы $l_X \in \text{Hom}(\mathbb{1} \otimes X, X)$ и $r_X \in \text{Hom}(X \otimes \mathbb{1}, X)$ тождественными для всех объектов X категории \mathfrak{E} , т.е.

$$l_X = id_X, r_X = id_X.$$

Лемма 6. Семейство изоморфизмов

$$l_X \in \text{Hom}(\mathbb{1} \otimes X, X) \text{ и } r_X \in \text{Hom}(X \otimes \mathbb{1}, X)$$

удовлетворяют треугольному соотношению

$$(r_X \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes l_Y) = \alpha_{X, \mathbb{1}, Y}$$

для любых объектов X, Y категории \mathfrak{E} .

Для любого морфизма $f \in \text{Hom}(X, Y)$:

$$(id_{\mathbb{1}} \otimes f) \circ l_Y = l_X \circ f \text{ и } (f \otimes id_{\mathbb{1}}) \circ r_Y = r_X \circ f.$$

Доказательство. Оба утверждения леммы очевидны, так как $\alpha_{X, \mathbb{1}, Y} = id_{X \otimes Y}$ и $l_X = r_X = id_X$. \square

Теорема 2. Категория \mathfrak{E} является моноидальной категорией.

Доказательство. Категория является моноидальной, если она удовлетворяет следующим условиям (см. [20, Параграфы 2.1 и 2.2]):

1. Тензорное произведение является функтором $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$. Это следует из лемм 1 и 2;
2. Ассоциаторы удовлетворяют пятичленному соотношению. Это следует из леммы 3;
3. Левые и правые единичные изоморфизмы удовлетворяют треугольному соотношению. Это следует из леммы 6 (первое утверждение);
4. Ассоциаторы естественны в категории \mathfrak{E} . Это следует из леммы 4;
5. Левые и правые единичные изоморфизмы естественны в категории \mathfrak{E} . Это следует из леммы 6 (второе утверждение).

\square

2.3 Сплетение

В этом разделе явно строится семейство изоморфизмов $c_{X,Y} \in \text{Hom}(X \otimes Y, Y \otimes X)$, определённых для каждой пары объектов X, Y категории \mathfrak{E} . Это семейство изоморфизмов называется сплетением на категории \mathfrak{E} .

В предыдущем разделе ассоциаторы были заданы с использованием константы ε , являющейся корнем уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. У этого уравнения два корня: один из них отрицательный, а другой — положительный. Пусть $\xi = e^{\frac{\pi i}{5}}$ — примитивный корень из 1 степени 10. Если константа ε положительна, то тогда $\varepsilon = \xi + \xi^{-1}$, а если она отрицательна, то $\varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3}$. Рассмотрим две константы β_ε^+ и β_ε^- , определённые следующим образом в зависимости от значения ε :

$$\beta_\varepsilon^+ = \begin{cases} \xi^3, & \text{если } \varepsilon = \xi + \xi^{-1} \\ \xi, & \text{если } \varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3} \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta_\varepsilon^- = \begin{cases} \xi^{-3}, & \text{если } \varepsilon = \xi + \xi^{-1} \\ \xi^{-1}, & \text{если } \varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3} \end{cases}.$$

Через β_ε будем обозначать любую из констант β_ε^+ или β_ε^- .

Замечание 6. Легко проверить, что

$$\beta_\varepsilon^2 \cdot \varepsilon + \beta_\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Из этого следует, что

$$\beta_\varepsilon^2 = -1 - \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}, \beta_\varepsilon^3 = \frac{1 - \beta_\varepsilon}{\varepsilon}, \beta_\varepsilon^4 = \beta_\varepsilon + \varepsilon - 1, \beta_\varepsilon^5 = -1.$$

Пусть $X, Y \in I$ — два простых объекта категории \mathfrak{E} . Если хотя бы один из них совпадает с объектом $\mathbf{1}$, то положим $c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$. Если $X = Y = \mathbf{A}$, то $X \otimes Y = Y \otimes X = (\mathbf{1}, \mathbf{A})$. В этом случае зададим изоморфизм $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ с помощью следующих двух матриц:

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (\beta_\varepsilon^2), [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = (\beta_\varepsilon).$$

Продолжим определение изоморфизмов $c_{X,Y}$ для простых объектов на все остальные объекты категории \mathfrak{E} точно так же, как это делалось при определении ассоциаторов. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ — два объекта категории \mathfrak{E} . Тогда значение морфизма $c_{X,Y}$ на паре $(x_i \otimes y_j, y_p \otimes x_q)$, $i, q \in \{1, \dots, n\}$, $j, p \in \{1, \dots, m\}$, определяется так: если $i \neq q$ или $j \neq p$, то это значение равно нулю, в противном же случае оно равно значению морфизма c_{x_i, y_j} на компонентах произведений $x_i \otimes y_j$ и $y_j \otimes x_i$.

Пример 4. Морфизмы $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}, id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \in \text{Hom}((\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ задаются одинаковыми матрицами

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (\beta_\varepsilon),$$

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \beta_{\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Морфизмы $c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}, c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})} \in Hom((\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}), (\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A}))$ тоже задаются одинаковыми матрицами

$$[c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{1}} = (\beta_{\epsilon}^2), [c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Диаграммы изоморфизмов $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}, c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}, id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}, c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}$ и $c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ изображены на рисунке 13.

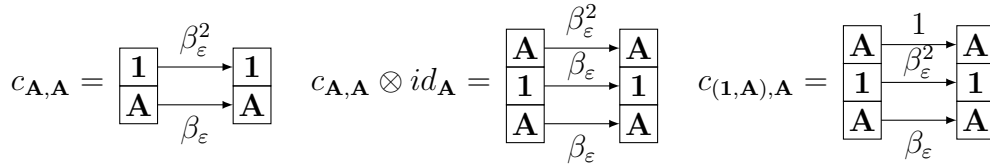


Рис. 13: Диаграммы изоморфизмов $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ (слева), $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}, id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ (в центре) и $c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}, c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ (справа)

Лемма 7. Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 — объекты категории \mathfrak{E} , и пусть $f \in Hom(X_1, Y_1), g \in Hom(X_2, Y_2)$ — два морфизма. Тогда

$$(f \otimes g) \circ c_{Y_1, Y_2} = c_{X_1, X_2} \circ (g \otimes f).$$

Доказательство. Утверждение леммы достаточно проверить лишь для простых объектов. Если хотя бы один из объектов X_1, X_2, Y_1, Y_2 совпадает с $\mathbf{1}$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = \mathbf{A}$. Пусть $\hat{f} \in \mathbb{C}$ — число, задающее морфизм f , и пусть $\hat{g} \in \mathbb{C}$ — число, задающее морфизм g . Диаграмма морфизма, соответствующего левой части утверждения леммы, изображена на рисунке 14.

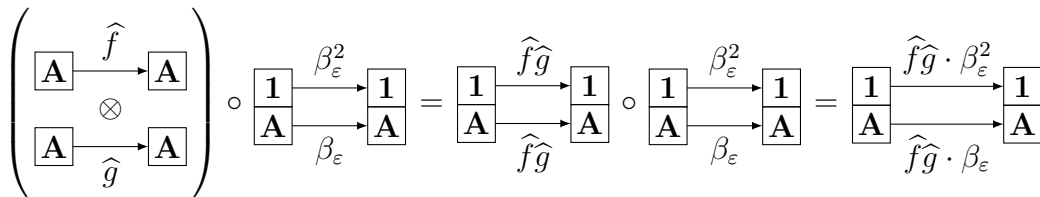


Рис. 14: Диаграмма морфизма, соответствующего левой части соотношения из утверждения леммы 7

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} \\ \xrightarrow{\beta_\varepsilon} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array} \circ \left(\begin{array}{c} \boxed{A} \xrightarrow{\widehat{f}} \boxed{A} \\ \otimes \\ \boxed{A} \xrightarrow{\widehat{g}} \boxed{A} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} \\ \xrightarrow{\beta_\varepsilon} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array} \circ \begin{array}{c} \boxed{1} \xrightarrow{\widehat{f\widehat{g}}} \boxed{1} \\ \widehat{f\widehat{g}} \\ \boxed{A} \xrightarrow{\widehat{f\widehat{g}}} \boxed{A} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2 \cdot \widehat{f\widehat{g}}} \\ \xrightarrow{\beta_\varepsilon \cdot \widehat{f\widehat{g}}} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{A} \end{array}$$

Рис. 15: Диаграмма морфизма, соответствующего правой части соотношения из утверждения леммы 7

Диаграмма морфизма, соответствующего правой части утверждения леммы, изображена на рисунке 15. Оба морфизма совпадают. \square

Лемма 8. Для любых трёх объектов X, Y, Z категории \mathfrak{E} :

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y,Z} \circ c_{X,Y \otimes Z} \circ \alpha_{Y,Z,X} &= (c_{X,Y} \otimes id_Z) \circ \alpha_{Y,X,Z} \circ (id_Y \otimes c_{X,Z}), \\ \alpha_{X,Y,Z}^{-1} \circ c_{X \otimes Y,Z} \circ \alpha_{Z,X,Y}^{-1} &= (id_X \otimes c_{Y,Z}) \circ \alpha_{X,Z,Y}^{-1} \circ (c_{X,Z} \otimes id_Y). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы, второе доказывается аналогично. Как и при доказательстве предыдущих лемм, достаточно доказать утверждение лишь для простых объектов. Если хотя бы один из объектов X, Y, Z совпадает с $\mathbf{1}$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $X = Y = Z = \mathbf{A}$.

Обозначим через $L, R \in \text{Hom}((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})$ левую и правую часть требуемого соотношения соответственно. Тогда

$$[L]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (1) \cdot (\beta_\varepsilon^2) \cdot (1) = (\beta_\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned} [L]_{\mathbf{A}} &= [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1 - \beta_\varepsilon) \\ \frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1 - \beta_\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$[R]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (\beta_\varepsilon) \cdot (1) \cdot (\beta_\varepsilon) = (\beta_\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned} [R]_{\mathbf{A}} &= [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon^4}{\varepsilon} & \frac{x\beta_\varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{\beta_\varepsilon^3}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{\beta_\varepsilon^2}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x(1-\beta_\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1-\beta_\varepsilon}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовалось замечание 6.

Т.о. $[L]_{\mathbf{1}} = [R]_{\mathbf{1}}$ и $[L]_{\mathbf{A}} = [R]_{\mathbf{A}}$, следовательно $L = R$. \square

Замечание 7. Как и в замечании 5, опишем способ, позволяющий найти изоморфизм $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$. Все остальные изоморфизмы $c_{X,Y}$ являются его следствием.

Пусть морфизм $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ задаётся матрицами с неопределёнными параметрами

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (p), [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = (q).$$

Тогда

$$[c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{1}} = [c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (p), [c_{\mathbf{A},(\mathbf{1},\mathbf{A})}]_{\mathbf{A}} = [c_{(\mathbf{1},\mathbf{A}),\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (q), [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Оба утверждения леммы 8 сводятся к двум матричным уравнениям

$$(1) \cdot (p) \cdot (1) = (q) \cdot (1) \cdot (q),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Эти матричные уравнения эквивалентны следующей системе из четырёх уравнений с двумя неизвестными p и q :

$$\begin{cases} p = q^2 \\ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{q}{\varepsilon} = \frac{p^2}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{q}{\varepsilon} = pq \\ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{q}{\varepsilon^2} = -\frac{q^2}{\varepsilon} \end{cases}.$$

Эта система имеет ровно два решения, которые параметризуются выбором константы $\beta_{\varepsilon} \in \{\beta_{\varepsilon}^+, \beta_{\varepsilon}^-\}$: $p = \beta_{\varepsilon}^2$ и $q = \beta_{\varepsilon}$.

Теорема 3. Семейство изоморфизмов $c_{X,Y} \in \text{Hom}(X \otimes Y, Y \otimes X)$, определённых для каждой пары объектов X, Y категории \mathfrak{E} , действительно является сплетением на категории \mathfrak{E} .

Доказательство. Достаточно проверить, что каждый из изоморфизмов $c_{X,Y}$ естественен и их совокупность удовлетворяет шестичленным соотношениям (см. [20, Параграф 8.1]). Естественность следует из леммы 7. Шестичленные соотношения доказаны в лемме 8. \square

2.4 Скручивание и двойственность

Скручиванием на категории \mathfrak{E} называется совокупность изоморфизмов $\theta_X \in \text{Hom}(X, X)$, определённых для каждого объекта X категории \mathfrak{E} . Двойственность на категории — это правило, которое каждому объекту X сопоставляет двойственный объект X^* , а также два семейства морфизмов $b_X \in \text{Hom}(\mathbf{1}, X \otimes X^*)$ и $d_X \in \text{Hom}(X^* \otimes X, \mathbf{1})$, определённых для каждого объекта X категории \mathfrak{E} .

2.4.1 Скручивание

Определим изоморфизм $\theta_X \in \text{Hom}(X, X)$ для каждого объекта X категории \mathfrak{E} следующим образом: $\theta_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$, $\theta_{\mathbf{A}}$ задаётся числом $\frac{1}{\beta_{\mathfrak{E}}^2}$, а на все остальные объекты категории \mathfrak{E} скручивание продолжается аналогично тому, как это делалось для морфизмов ассоциаторов и сплетения. Если $X = (x_1, \dots, x_n)$ — объект категории \mathfrak{E} , то морфизм $\theta_X \in \text{Hom}(X, X)$ определяется так: на паре компонент (x_i, x_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$, он равен 1 (если $x_i = \mathbf{1}$) или $\frac{1}{\beta_{\mathfrak{E}}^2}$ (если $x_i = \mathbf{A}$), а на всех остальных парах он равен нулю.

Замечание 8. Диаграмма любого изоморфизма $\theta_X \in \text{Hom}(X, X)$ устроена просто. Если $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in I$, то диаграмма состоит из n параллельных стрелок. Если стрелка соединяет символы $\mathbf{1}$, то ей сопоставлено значение 1, а если она соединяет символы \mathbf{A} , то значение $\frac{1}{\beta_{\mathfrak{E}}^2}$.

Лемма 9. Пусть $f \in \text{Hom}(X, Y)$ — морфизм категории \mathfrak{E} . Тогда

$$f \circ \theta_Y = \theta_X \circ f.$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определения изоморфизмов θ_X . \square

Лемма 10. Пусть X, Y — два объекта категории \mathfrak{E} . Тогда

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ c_{X, Y} \circ c_{Y, X}.$$

Доказательство. Утверждение леммы достаточно проверить лишь для простых объектов. Если хотя бы один из объектов X, Y совпадает с $\mathbf{1}$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $X = Y = \mathbf{A}$. Диаграмма морфизма, соответствующего левой части соотношения, изображена на рисунке 16 сверху, а диаграмма морфизма, соответствующего правой части соотношения — на том же рисунке 16 снизу. Обе диаграммы совпадают. \square

$$\theta_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}} = \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{1} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array}$$

$$(\theta_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} = \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\frac{1}{\beta_\varepsilon^4}} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\frac{1}{\beta_\varepsilon^4}} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} \circ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} \circ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} = \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{1} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array}$$

Рис. 16: Диаграммы морфизмов $\theta_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}$ (сверху) и $(\theta_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}$ (снизу)

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{1} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{s} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} = \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{s^2} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{s^2} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} \circ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} \circ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon^2} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\beta_\varepsilon} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array} = \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \xrightarrow{s^2 \cdot \beta_\varepsilon^4} & \boxed{1} \\ \boxed{\mathbf{A}} & \xrightarrow{s^2 \cdot \beta_\varepsilon^2} & \boxed{\mathbf{A}} \end{array}$$

Рис. 17: Условие $\theta_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}} = (\theta_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}$

Замечание 9. Обозначим значение, задающее изоморфизм $\theta_{\mathbf{A}}$, через $s \in \mathbb{C}$. Тогда диаграмма морфизма, участвующего в утверждении леммы 10 для случая $X = \mathbf{A}$, имеет вид, изображённый на рисунке 17.

Это приводит к системе

$$\begin{cases} s^2 \cdot \beta_\varepsilon^4 = 1 \\ s^2 \cdot \beta_\varepsilon^2 = s \end{cases},$$

которая имеет единственное решение $s = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$.

Обозначим $d(v_1, \dots, v_n)$ диагональную матрицу размера $n \times n$, с диагональными элементами v_1, \dots, v_n , а также обозначим $E_n = d(1, \dots, 1)$.

Лемма 11. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in I$, — объект категории \mathfrak{E} , $|X|_{\mathbf{1}} = n_{\mathbf{1}}$, $|X|_{\mathbf{A}} = n_{\mathbf{A}}$. Тогда:

1. $[\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}} = [id_X \otimes \theta_X]_{\mathbf{1}}$;
2. $[(\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X, X}]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}$.

Доказательство. Из определения следует, что $[\theta_X]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}}$ и $[\theta_X]_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2} \cdot E_{n_{\mathbf{A}}}$. Ясно, что $[id_X]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}}$ и $[id_X]_{\mathbf{A}} = E_{n_{\mathbf{A}}}$. Тогда

$$[\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}} = d(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}),$$

где значение δ_i равно 1 в случае, когда соответствующая компонента объекта $X \otimes X$ получена в результате произведения $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, и оно равно $\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$, в случае, когда соответствующая компонента получена в результате произведения $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ (это произведение даёт две компоненты: $\mathbf{1}$ и \mathbf{A}). Аналогичным образом

$$[id_X \otimes \theta_X]_{\mathbf{1}} = d(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_1^2+n_2^2}).$$

Т.о. первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$[c_{X,X}]_{\mathbf{1}} = d(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_1^2+n_2^2}),$$

где $\sigma_i = 1$ в случае, когда соответствующая компонента произведения $X \otimes X$ получена произведением $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, и $\sigma_i = \beta_\varepsilon^2$ в случае, когда соответствующая компонента получена произведением $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$. Поэтому произведение матриц $[c_{X,X}]_{\mathbf{1}} \cdot [\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}}$ совпадает с матрицей $E_{n_1^2+n_2^2}$. \square

2.4.2 Двойственность

Определим отображение двойственности в категории \mathfrak{E} тривиальным образом: положим каждый объект самодвойственным, то есть $X^* = X$ для каждого объекта X категории \mathfrak{E} .

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in I$, — объект категории \mathfrak{E} , $|X|_{\mathbf{1}} = n_{\mathbf{1}}$, $|X|_{\mathbf{A}} = n_{\mathbf{A}}$. Определим морфизмы $b_X \in Hom(\mathbf{1}, X \otimes X)$ и $d_X \in Hom(X \otimes X, \mathbf{1})$ следующим образом. Заметим, что результат произведения $x_i \otimes x_i$ равен либо $\mathbf{1}$ (если $x_i = \mathbf{1}$), либо $(\mathbf{1}, \mathbf{A})$ (если $x_i = \mathbf{A}$). Обозначим $(x_i \otimes x_i)_1$ первую компоненту (всегда равную $\mathbf{1}$) в результате этого произведения. Морфизмы b_X и d_X полностью задаются матрицами

$$[b_X]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{n_1^2+n_2^2} \end{pmatrix}, [d_X]_{\mathbf{1}} = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_{n_1^2+n_2^2}).$$

Положим $\delta_s = \sigma_s = 0$ в случае, если s -ая компонента $\mathbf{1}$ в произведении $X \otimes X$ получена в результате произведения $x_i \otimes x_j$, $i \neq j$, и положим $\delta_s = \varphi_i$, $\sigma_s = \psi_i$ в случае, если s -ая компонента является компонентой $(x_i \otimes x_i)_1$. Далее, положим $\varphi_i = y$, $\psi_i = \frac{1}{y}$ если $x_i = \mathbf{1}$, и $\varphi_i = y\sqrt{\varepsilon}$, $\psi_i = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$ если $x_i = \mathbf{A}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Здесь $y \in \mathbb{C}$ — произвольный ненулевой комплексный параметр.

Пример 5. Ясно, что $b_{\mathbf{1}} = d_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$.

Диаграммы морфизмов $b_{\mathbf{A}}$ и $d_{\mathbf{A}}$ изображены на рисунке 18. В этом случае $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{A})$, и первое слагаемое $\mathbf{1}$ есть в точности $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_1$. Значит значение, сопоставленное единственной стрелке на диаграмме морфизмов $b_{\mathbf{A}}$ и $d_{\mathbf{A}}$, равно $y\sqrt{\varepsilon}$ и $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$ соответственно.

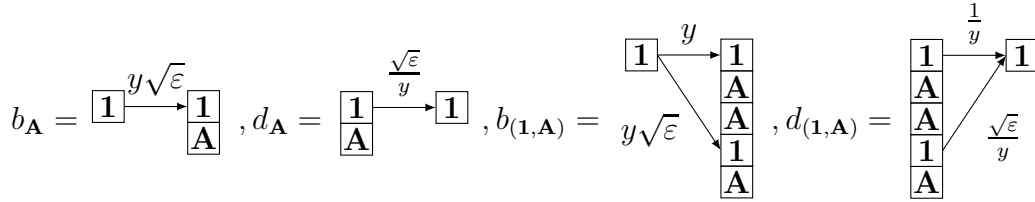


Рис. 18: Морфизмы $b_{\mathbf{A}}$, $d_{\mathbf{A}}$, $b_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ и $d_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$

Диаграммы морфизмов $b_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ и $d_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ изображены на том же рисунке 18. В этом случае $(\mathbf{1}, \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{A}) = (\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})$. Получается, что первый символ $\mathbf{1}$ есть $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_1$, а второй символ $\mathbf{1}$ есть $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_1$. Значит на диаграмме морфизма $b_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ значение y сопоставлено первой стрелке, и значение $y\sqrt{\varepsilon}$ — второй. Аналогичным образом на диаграмме морфизма $d_{(\mathbf{1},\mathbf{A})}$ значение $\frac{1}{y}$ сопоставлено первой стрелке, и значение $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$ — второй.

Лемма 12. Для каждого объекта X категории \mathfrak{E} :

1. $(b_X \otimes id_X) \circ \alpha_{X,X,X} \circ (id_X \otimes d_X) = id_X$;
2. $(id_X \otimes b_X) \circ \alpha_{X,X,X}^{-1} \circ (d_X \otimes id_X) = id_X$.

Доказательство. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in I$. Докажем первое утверждение леммы используя диаграммный язык задания морфизмов.

Из определения морфизма $b_X \in Hom(\mathbf{1}, X \otimes X)$ следует, что диаграмма этого морфизма содержит ровно n ненулевых стрелок. Эти стрелки соединяют ячейки с символом $\mathbf{1}$ с ячейками $(x_1 \otimes x_1)_1, \dots, (x_n \otimes x_n)_1$. Пусть $\varphi_i \in \{y, y\sqrt{\varepsilon}\}$ — значение, сопоставленное i -ой стрелке (рис. 19 слева). Тогда диаграмма морфизма $b_X \otimes id_X \in Hom(X, (X \otimes X) \otimes X)$ содержит ровно n^2 стрелок. Эти стрелки соединяют каждую ячейку x_i с ячейками $(x_1 \otimes x_1)_1 \otimes x_i, \dots, (x_n \otimes x_n)_1 \otimes x_i$. Значения, сопоставленные этим стрелкам, равны $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ соответственно (рис. 19 справа).

Диаграмма морфизма d_X содержит ровно n ненулевых стрелок. В этой диаграмме i -ая стрелка соединяет ячейку $(x_i \otimes x_i)_1$ с ячейкой, содержащей символ $\mathbf{1}$, а сопоставленное ей значение равно $\psi_i \in \{\frac{1}{y}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}\}$ (рис. 20 слева). Тогда диаграмма морфизма $id_X \otimes d_X \in Hom(X \otimes (X \otimes X), X)$ содержит ровно n^2 стрелок. Стрелка, которой сопоставлено значение ψ_j , соединяет

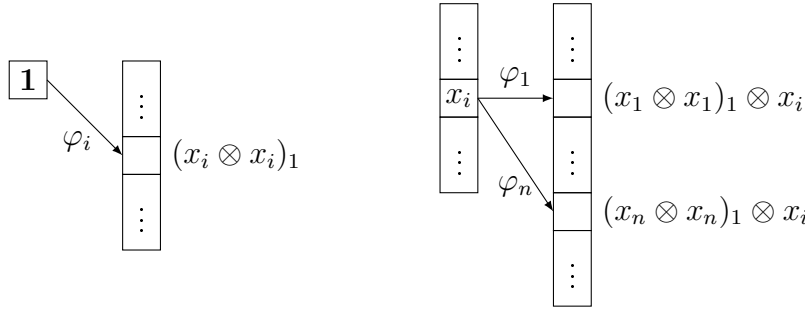


Рис. 19: Диаграммы морфизма b_X (слева) и $b_X \otimes id_X$ (справа)

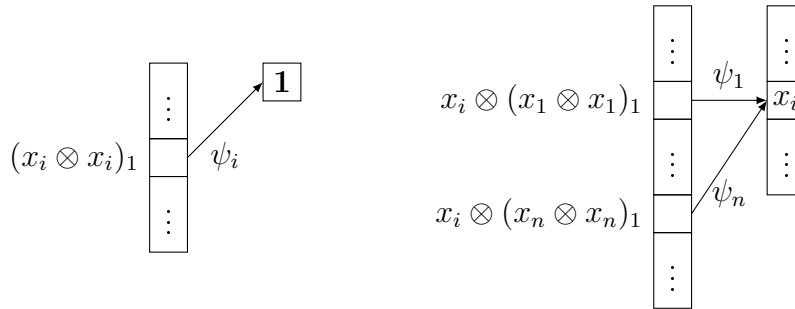


Рис. 20: Диаграммы морфизма d_X (слева) и $id_X \otimes d_X$ (справа)

ячейку $x_i \otimes (x_j \otimes x_j)_1$, $j \in \{1, \dots, n\}$, с ячейкой x_i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ (рис. 20 справа).

Наконец заметим, что диаграмма ассоциатора $\alpha_{X,X,X}$ содержит ненулевую стрелку, соединяющую $(x_j \otimes x_j)_1 \otimes x_i$ и $x_p \otimes (x_q \otimes x_q)_1$, тогда и только тогда, когда $i = j = p = q$. Если $x_i = x_j = x_p = x_q = \mathbf{1}$, то значение, сопоставленное этой стрелке, равно 1, а если $x_i = x_j = x_p = x_q = \mathbf{A}$, то значение, сопоставленное этой стрелке, равно $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому в диаграмме композиции $(b_X \otimes id_X) \circ \alpha_{X,X,X} \circ (id_X \otimes d_X)$ левая ячейка x_i соединена стрелкой только с правой ячейкой x_i , а значение, сопоставленное этой стрелке, равно 1. Этот морфизм совпадает с id_X .

Доказательство второго утверждения леммы аналогично. \square

Лемма 13. Пусть X — объект категории \mathfrak{E} . Тогда

1. $b_X \circ (\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X,X} = b_X$;
2. $(\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X,X} \circ d_X = d_X$;
3. $b_X \circ (\theta_X \otimes id_X) = b_X \circ (id_X \otimes \theta_X)$.

Доказательство. Морфизм b_X полностью определяется матрицей $[b_X]_{\mathbf{1}}$, так как матрица $[b_X]_{\mathbf{A}}$ содержит нулевое число столбцов. Следовательно, композиция $b_X \circ f$ с любым подходящим морфизмом f определяется только матрицами $[b_X]_{\mathbf{1}}$ и $[f]_{\mathbf{1}}$. Тогда первые два утверждения леммы следуют из второго утверждения леммы 11. Третье утверждение леммы следует из первого утверждения леммы 11. \square

Теорема 4. Категория \mathfrak{E} является ленточной.

Доказательство. Достаточно проверить (см. [20, Параграф 2.10]), что морфизмы b_X, d_X действительно задают двойственность на категории \mathfrak{E} с самодвойственными объектами. Их согласованность следует из леммы 12 и леммы 13 (третье утверждение).

Помимо этого надо проверить (см. [20, Параграф 8.11]), что изоморфизмы θ_X естественны в категории \mathfrak{E} (это следует из леммы 9), а также, что сплетение согласовано со скручиванием (это следует из леммы 10). \square

Теорема 5. Категория \mathfrak{E} является модулярной.

Доказательство. Ясно, что категория \mathfrak{E} является абелевой. В самом деле, для любых двух объектов X, Y этой категории множество морфизмов $\text{Hom}(X, Y)$ обладает естественной структурой абелевой группы, при этом композиция морфизмов линейна относительно этой структуры.

Каждый объект категории \mathfrak{E} доминируется простыми объектами $\mathbf{1}, \mathbf{A}$. Это тоже очевидно, так как каждый объект представляется в виде конечной упорядоченной последовательности простых объектов. Т.о. для модулярности категории \mathfrak{E} осталось проверить, что матрица

$$S = \begin{pmatrix} S_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & S_{\mathbf{1},\mathbf{A}} \\ S_{\mathbf{A},\mathbf{1}} & S_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \end{pmatrix}$$

обратима над \mathbb{C} . В этой матрице значение $S_{X,Y}$ для каждой пары объектов X, Y категории \mathfrak{E} определяется с помощью композиции

$$S_{X,Y} = b_{X \otimes Y} \circ ((c_{X,Y} \circ c_{Y,X}) \otimes id_{X \otimes Y}) \circ d_{X \otimes Y}.$$

Заметим, что в силу леммы 13 (первое и второе утверждение) эта формула выглядит проще по сравнению с её общим случаем (см. [2, Параграф II.1.4]).

Ясно, что $S_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = b_{\mathbf{1}} \circ ((c_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ c_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ d_{\mathbf{1}} = 1$.

Если $X, Y \in I$ и $X \neq Y$, то $b_{X \otimes Y} = b_{\mathbf{A}}$, $c_{X,Y} = c_{Y,X} = id_{\mathbf{A}}$, $id_{X \otimes Y} = id_{\mathbf{A}}$ и $d_{X \otimes Y} = d_{\mathbf{A}}$. Следовательно $S_{\mathbf{1},\mathbf{A}} = S_{\mathbf{A},\mathbf{1}} = b_{\mathbf{A}} \circ d_{\mathbf{A}} = \varepsilon$.

Наконец, рассмотрим случай $X = Y = \mathbf{A}$. Диаграмма морфизма, получающегося в результате композиции $b_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})} \circ ((c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}) \otimes id_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}) \circ d_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}$ изображена на рисунке 21. Следовательно

$$S_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} = \beta_\varepsilon^4 + \varepsilon \cdot \beta_\varepsilon^2 = \beta_\varepsilon + \varepsilon - 1 + \varepsilon \cdot \left(-1 - \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -1.$$

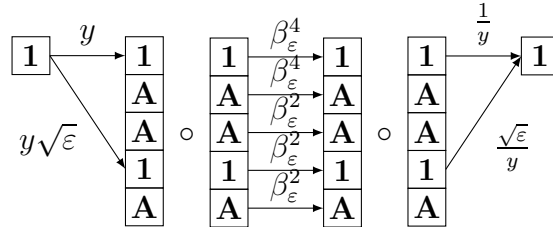


Рис. 21: Диаграмма композиции $b_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})} \circ ((c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}) \otimes id_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}) \circ d_{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}$

В результате

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix}, \det S = -2 - \varepsilon \neq 0.$$

□

§ 3. Инвариант rt_ε

Пусть $L = l_1 \cup \dots \cup l_k$ — диаграмма k -компонентного зацепления. Будем называть раскраской зацепления L отображение $\xi: \{l_1, \dots, l_k\} \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$. Простые объекты $\mathbf{1}$ и \mathbf{A} — это цвета, которыми раскрашиваются компоненты зацепления. Определим морфизм $\{L\}_\xi \in Hom(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ следующим образом. Сначала удалим все компоненты зацепления, покрашенные объектом $\mathbf{1}$. В результате получим подзацепление L' , все компоненты которого покрашены объектом \mathbf{A} . Зафиксируем разбиение диаграммы L' параллельными вертикальным прямыми на элементарные слои, каждый из которых содержит конечное число горизонтальных дуг и не более одного участка, изображённого на рисунке 22. Участки диаграммы являются неориентированными. Чтобы различать два разных типа перекрёстков, один из них будем называть положительным (тот, ориентируя дуги которого слева направо, получается классический положительный ориентированный перекрёсток), а другой — отрицательным (ориентируя его дуги слева направо получается классический отрицательный ориентированный перекрёсток). Аналогичным образом положительная петля — это

участок, который после выбора ориентации в любую сторону содержит положительный перекрёсток. Другая петля — отрицательная.

Пусть λ — один из элементарных слоёв разбиения диаграммы L' . Заменяем положительный перекрёсток внутри слоя λ на морфизм $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$, отрицательный перекрёсток — на морфизм $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}^{-1}$, левую полуокружность — на морфизм $b_{\mathbf{A}}$, правую полуокружность — на морфизм $d_{\mathbf{A}}$, положительную петлю — на морфизм $\theta_{\mathbf{A}}$, отрицательную петлю — на морфизм $\theta_{\mathbf{A}}^{-1}$ и, наконец, тривиальную горизонтальную дугу заменим на морфизм $id_{\mathbf{A}}$ (рис. 22). Участки диаграммы, расположенные сверху вниз в пределах одного слоя — это тензорное произведение соответствующих морфизмов. Если левая прямая, ограничивающая слой λ , пересекается с диаграммой L' в n точках, а правая прямая, ограничивающая слой λ — в m точках, то этот слой соответствует морфизму из множества $\text{Hom}(\mathbf{A}^{\otimes n}, \mathbf{A}^{\otimes m})$ (см. рис. 23, на котором изображено два примера). Обозначим μ_{λ} морфизм категории \mathfrak{E} , полученный описанным образом для слоя λ .

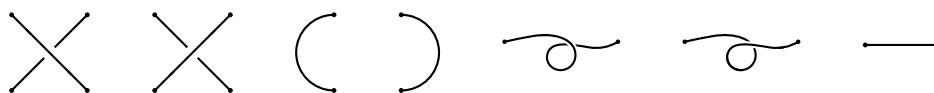


Рис. 22: Слева направо: положительный перекрёсток, отрицательный перекрёсток, левая полуокружность, правая полуокружность, положительная петля, отрицательная петля, тривиальная дуга

Если диаграмма L' разбивается на элементарные слои $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (слева направо), тогда морфизм $\{L\}_{\xi}$ — это композиция

$$\mu_{\lambda_1} \circ \dots \circ \mu_{\lambda_n}.$$

При этом некоторые из элементарных слоёв могут быть тривиальными (содержать только горизонтальные дуги), и тогда соответствующий такому слою морфизм — комбинация ассоциаторов, связывающих объект, соответствующий правой прямой предыдущего слоя, и объект, соответствующий левой прямой следующего слоя.

Диаграмму зацепления L вместе с зафиксированной раскраской ξ можно воспринимать как диаграмму морфизма $\{L\}_{\xi}$. Чтобы отличать эти диаграммы от уже используемых диаграмм морфизмов (состоящих из ячеек и стрелок между ними), будем такие диаграммы называть заузленными диаграммами морфизма $\{L\}_{\xi}$.

Так как морфизм $\{L\}_{\xi}$ является морфизмом из $\mathbf{1}$ в $\mathbf{1}$, то он задаётся одним комплексным числом. Будем отождествлять морфизм с этим числом и считать, что $\{L\}_{\xi} \in \mathbb{C}$.

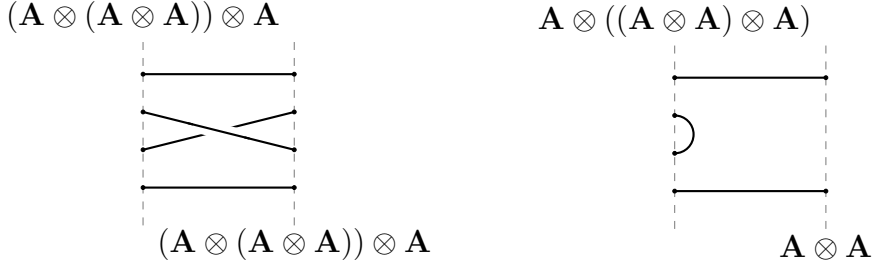


Рис. 23: Морфизм $(id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}}$ (слева) и $id_{\mathbf{A}} \otimes (d_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}})$ (справа)

Замечание 10. Если $\{L\}_{\xi} = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_{n-1} \circ \mu_n$, то

$$\{L\}_{\xi} = [\mu_n]_1 \cdot [\mu_{n-1}]_1 \cdot \dots \cdot [\mu_2]_1 \cdot [\mu_1]_1.$$

Пример 6. Пусть L — диаграмма узла «трилистник», изображённая на рисунке 24, и пусть ξ — раскраска, которая единственной компоненте диаграммы L сопоставляет цвет \mathbf{A} . Диаграмма L разбивается на 11 слоёв $\lambda_1, \dots, \lambda_{11}$. Соответствующие морфизмы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_1} &= b_{\mathbf{A}} \in \text{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \\ \mu_{\lambda_2} &= (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes b_{\mathbf{A}} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_3} &= \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}} \in \text{Hom}((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))) \\ \mu_{\lambda_4} &= id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}^{-1} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_5} &= id_{\mathbf{A}} \otimes (c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_6} &= id_{\mathbf{A}} \otimes (c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_7} &= id_{\mathbf{A}} \otimes (c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_8} &= id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))) \\ \mu_{\lambda_9} &= \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}^{-1} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \\ \mu_{\lambda_{10}} &= d_{\mathbf{A}} \otimes (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in \text{Hom}((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \\ \mu_{\lambda_{11}} &= d_{\mathbf{A}} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Морфизмы μ_{λ_3} и μ_{λ_4} — это морфизмы ассоциаторов, преобразующие объект $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ (который получается на правой границе слоя λ_2) в объект $\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})$. Эти ассоциаторы необходимы, так как для того, чтобы можно было применять морфизм сплетения в слое λ_5 два центральных множителя $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ должны стоять в одной паре скобок. Аналогичную роль играют морфизмы, соответствующие слоям μ_{λ_8} и μ_{λ_9} .

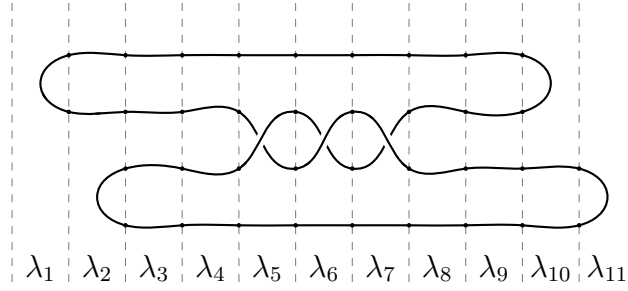


Рис. 24: Диаграмма узла «трилистник», разбитая на 11 слоёв $\lambda_1, \dots, \lambda_{11}$

На рисунке 25 изображена диаграмма морфизма, являющегося композицией $\mu_{\lambda_1} \circ \dots \circ \mu_{\lambda_{11}}$.

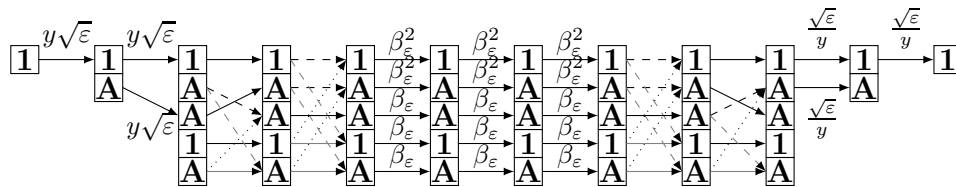


Рис. 25: Диаграмма морфизма $\mu_{\lambda_1} \circ \dots \circ \mu_{\lambda_{11}}$

В результате вычисляем, что

$$\begin{aligned} \{L\}_\xi &= y\sqrt{\epsilon} \cdot y\sqrt{\epsilon} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} \cdot \beta_\epsilon^6 \cdot \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{x\sqrt{\epsilon}} \cdot \beta_\epsilon^3 \cdot \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right) \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{\epsilon}}{y} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon}}{y} = \\ &= \beta_\epsilon^6 + \epsilon \cdot \beta_\epsilon^3 = -\beta_\epsilon + 1 - \beta_\epsilon = 1 - 2\beta_\epsilon. \end{aligned}$$

Предложение 1. Пусть L — диаграмма зацепления, и пусть ξ — её раскраска. Тогда значение $\{L\}_\xi$ не зависит от параметра y в морфизмах b_A и d_A .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что раскраска ξ все компоненты диаграммы L раскрашивает в цвет A . Заметим, что число левых и правых полуокружностей на диаграмме L совпадают. Следовательно, в композиции, задающей морфизм $\{L\}_\xi$, число морфизмов b_A совпадает с числом морфизмов d_A . Тогда все вхождения параметра y в морфизм b_A сокращаются с вхождениями дроби $\frac{1}{y}$ в морфизм d_A . \square

3.5 Инвариант зацеплений

Пусть $L = l_1 \cup \dots \cup l_k$ — диаграмма неориентированного k -компонентного зацепления. Зафиксируем раскраску $\xi_{\mathbf{A}}: \{l_1, \dots, l_k\} \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$, которая каждую компоненту l_i раскрашивает в цвет \mathbf{A} для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выберем какую-нибудь ориентацию компоненты l_i . Обозначим $w(l_i) = \#p - \#n$, где $\#p$ — это число положительных перекрёстков на диаграмме l_i (то есть число положительных перекрёстков, в окрестности которых обе дуги принадлежат зацеплению l_i), а $\#n$ — это число отрицательных перекрёстков на диаграмме l_i (аналогичным образом, обе дуги в окрестности этих перекрёстков принадлежат зацеплению l_i). Обе величины $\#p$ и $\#n$ корректно определены и не зависят от выбранной ориентации компоненты l_i . Положим $w(L) = \sum_{i=1}^k w(l_i)$.

Определим значение

$$rt_{\varepsilon}(L) = \frac{\beta_{\varepsilon}^{2w(L)}}{\varepsilon} \cdot \{L\}_{\xi_{\mathbf{A}}}.$$

Теорема 6. Пусть L_1 и L_2 — две диаграммы одного и того же зацепления в S^3 . Тогда $rt_{\varepsilon}(L_1) = rt_{\varepsilon}(L_2)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение теоремы лишь для случая, когда диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью одного движения Рейдемейстера.

Если диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью второго или третьего движения Рейдемейстера, то $w(L_1) = w(L_2)$. По теореме 4 категория \mathfrak{E} является ленточной. Этого достаточно для того, чтобы $\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$. Этот факт можно доказать, повторив все рассуждения из доказательства теоремы [2, Теорема I.2.5] применительно к категории \mathfrak{E} . Следовательно, $rt_{\varepsilon}(L_1) = rt_{\varepsilon}(L_2)$.

Пусть диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью положительного первого движения Рейдемейстера (оно добавляет положительную петлю на дуге диаграммы). Тогда $w(L_2) = w(L_1) + 1$.

Пусть морфизм $\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$ задаётся композицией $\mu_1 \circ \mu_2$, а морфизм $\{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$ задаётся композицией $\mu_1 \circ (id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}) \circ \mu_2$. Тогда

$$\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = [\mu_2]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_1]_{\mathbf{1}} \text{ и } \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = [\mu_2]_{\mathbf{1}} \cdot [id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_1]_{\mathbf{1}}.$$

Заметим, что $[id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}]_{\mathbf{1}} = \frac{1}{\beta_{\varepsilon}^2} \cdot E_{f_{n_1+n_2+1}}$, где f_n — это n -ое число Фибоначчи. Следовательно, $\{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{1}{\beta_{\varepsilon}^2} \{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$. Наконец,

$$rt_{\varepsilon}(L_2) = \frac{\beta_{\varepsilon}^{2w(L_2)}}{\varepsilon} \cdot \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{\beta_{\varepsilon}^{2w(L_1)} \cdot \beta_{\varepsilon}^2}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\beta_{\varepsilon}^2} \cdot \{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = rt_{\varepsilon}(L_1).$$

Для случая отрицательного первого движения Рейдемейстера доказательство аналогично. \square

Пусть \mathbb{L} — зацепление в трёхмерной сфере S^3 , и пусть L — диаграмма этого зацепления. Определим $rt_\varepsilon(\mathbb{L}) = rt_\varepsilon(L)$. Теорема 6 гарантирует, что это определение корректно.

Пример 7. Пусть \mathbb{U} — тривиальный узел, U — его тривиальная диаграмма. Тогда $\{U\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = b_{\mathbf{A}} \circ d_{\mathbf{A}} = \varepsilon$. Таким образом $rt_\varepsilon(\mathbb{U}) = 1$.

Пусть \mathbb{Z}_1 — узел «трилистник». Используя результаты вычислений в примере 6 находим, что $rt_\varepsilon(\mathbb{Z}_1) = \frac{\beta_\varepsilon^6}{\varepsilon} \cdot (1 - 2\beta_\varepsilon) = \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} \cdot (2\beta_\varepsilon - 1)$. Зафиксировав конкретные значения констант ε и β_ε , получим конкретное комплексное число $rt_\varepsilon(\mathbb{Z}_1)$.

Пусть \mathbb{H}_2 — зацепление Хопфа. Тогда $rt_\varepsilon(\mathbb{H}_2) = \frac{S_{\mathbf{A},\mathbf{A}}}{\varepsilon}$, где $S_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ — одно из значений S -матрицы из доказательства теоремы 5. Находим, что $rt_\varepsilon(\mathbb{H}_2) = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Пусть \mathbb{H}_k , $k \geq 1$ — обобщённое k -компонентное зацепление Хопфа. Диаграмма H_k этого зацепления состоит из k тривиальных окружностей U_1, \dots, U_k , причём для каждого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ пара компонент U_i, U_{i+1} зацеплены как минимальная диаграмма классического зацепления Хопфа (см. рис. 26). Отметим, что $\mathbb{H}_1 = \mathbb{U}$ является тривиальным узлом, а \mathbb{H}_2 — это классическое зацепление Хопфа.

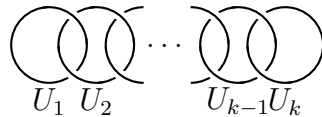


Рис. 26: Обобщённое k -компонентное зацепление Хопфа

Теорема 7. $rt_\varepsilon(\mathbb{H}_k) = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{1-k}$ для всех $k \geq 1$.

Доказательство. Пусть $h \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ — морфизм, заузленная диаграмма которого изображена на рисунке 27. Эта диаграмма разбивается на восемь слоёв $\lambda_1, \dots, \lambda_8$. Соответствующие морфизмы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_1} &= (id_{\mathbf{A}} \otimes b_{\mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \otimes \mathbf{A}), \\ \mu_{\lambda_2} &= \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}}^{-1} \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \otimes \mathbf{A}, ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \\ \mu_{\lambda_3} &= (c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \\ \mu_{\lambda_4} &= \alpha_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), \\ \mu_{\lambda_5} &= (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), \\ \mu_{\lambda_6} &= \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))), \\ \mu_{\lambda_7} &= id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}}^{-1} \in Hom(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})), \\ \mu_{\lambda_8} &= id_{\mathbf{A}} \otimes (d_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in Hom(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Аналогично примеру 6, здесь слои $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ и λ_7 используются для морфизмов ассоциаторов.

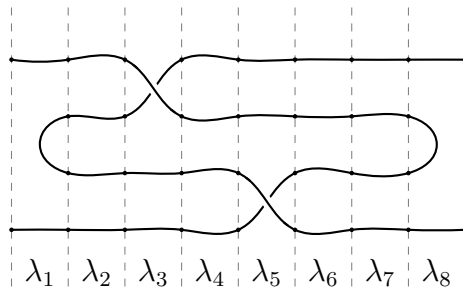


Рис. 27: Заузленная диаграмма морфизма h

Диаграмма морфизма h изображена на рисунке 28.

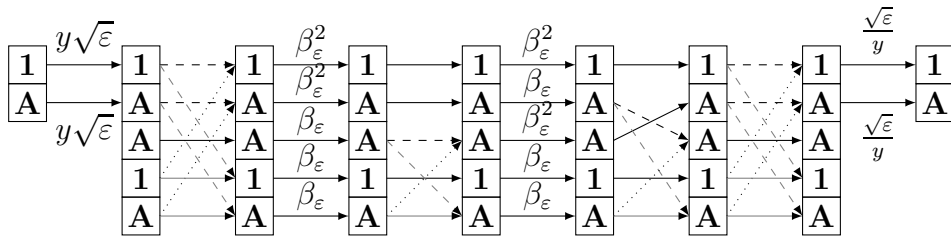


Рис. 28: Диаграмма морфизма h

Далее вычисляем

$$\begin{aligned} [h]_{\mathbf{1}} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\epsilon}}{y} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} & \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\epsilon}} & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\epsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\epsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} & \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\epsilon}} & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y\sqrt{\epsilon} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\beta_{\epsilon}^4}{\epsilon} + \beta_{\epsilon}^2 \right) = \left(-\frac{1}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} \{H_k\}_{\xi_{\mathbf{A}}} &= b_{\mathbf{A}} \circ \underbrace{h \circ \dots \circ h}_{k-1 \text{ раз}} \circ d_{\mathbf{A}} = [d_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [h]_{\mathbf{1}}^{k-1} \cdot [b_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y} \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} \cdot y\sqrt{\varepsilon} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{2-k}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$rt_{\varepsilon}(\mathbb{H}_k) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \{H_k\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{1-k}.$$

□

3.6 Инвариант для трёхмерных многообразий

Пусть \mathbb{L} — неориентированное k -компонентное зацепление, в котором зафиксирован порядок компонент, и $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_k)$ — набор целых чисел. Будем понимать под оснащённым зацеплением пару (\mathbb{L}, \mathbb{F}) . Каждое из значений f_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ — это оснащение i -ой компоненты. Диаграмма оснащённого зацепления — это такая диаграмма $L = l_1 \cup \dots \cup l_k$ зацепления \mathbb{L} , что $w(l_i) = f_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

Под сигнатурой оснащённого зацепления (\mathbb{L}, \mathbb{F}) будем понимать сигнатуру матрицы

$$[(\mathbb{L}, \mathbb{F})] = \begin{pmatrix} f_1 & lk(l_1, l_2) & \dots & lk(l_1, l_k) \\ lk(l_2, l_1) & f_2 & \dots & lk(l_2, l_k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ lk(l_k, l_1) & lk(l_k, l_2) & \dots & f_k \end{pmatrix},$$

где $lk(l_i, l_j)$ — коэффициент зацепления компонент l_i и l_j . Сигнатура может быть вычислена следующим образом. Рассмотрим квадратичную форму, матрица которой совпадает $[(\mathbb{L}, \mathbb{F})]$. Тогда сигнатура совпадает с разностью числа положительных и отрицательных слагаемых в каноническом виде этой квадратичной формы. Значение сигнатуры не зависит от выбора ориентаций компонент l_1, \dots, l_k , которые необходимо зафиксировать для вычисления их коэффициентов зацеплений.

Хорошо известно, что любое трёхмерное многообразие может быть получено из трёхмерной сферы S^3 с помощью перестройки вдоль оснащённого зацепления. Обозначим многообразие, которое получается перестройкой по оснащённому зацеплению (\mathbb{L}, \mathbb{F}) через $M_{(\mathbb{L}, \mathbb{F})}$.

Определим

$$rt_\varepsilon(M_{(\mathbb{L}, \mathbb{F})}) = \Delta^\sigma \cdot D^{-\sigma-k-1} \cdot \sum_{\xi} \varepsilon^{|\xi|_{\mathbf{A}}} \cdot \{L\}_{\xi},$$

где σ — сигнатура оснащённого зацепления (\mathbb{L}, \mathbb{F}) , $\Delta = 1 + \varepsilon^2 \cdot \beta_\varepsilon^2$, $D = \sqrt{2 + \varepsilon}$, сумма берётся по всем раскраскам ξ диаграммы L , и $|\xi|_{\mathbf{A}}$ — число компонент, покрашенных цветом \mathbf{A} . Повторяя все рассуждения из доказательства теоремы [2, Теорема II.2.2.2] (справедливости ради, весьма громоздкие) применительно к категории \mathfrak{E} можно доказать, что rt_ε — корректно определённый инвариант замкнутых трёхмерных многообразий, то есть значение $rt_\varepsilon(M_{(\mathbb{L}, \mathbb{F})})$ не зависит от выбора оснащённого зацепления (\mathbb{L}, \mathbb{F}) , задающего многообразие.

Пример 8. Пусть M — сфера Пуанкаре. Хорошо известно, что многообразие M может быть получено из S^3 перестройкой вдоль правого «трилистника» \mathbb{Z}_1 с оснащением $f_1 = +1$. Диаграмма T этого оснащённого узла изображена на рисунке 29.

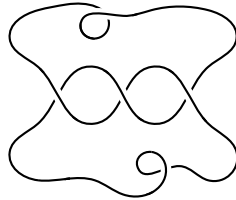


Рис. 29: Диаграмма T правого «трилистника» с оснащением $+1$

В этом случае $\sigma = 1$, и существует всего две раскраски: ξ_1 раскрашивает T цветом $\mathbf{1}$, а $\xi_{\mathbf{A}}$ раскрашивает T цветом \mathbf{A} . Тогда $\{T\}_{\xi_1} = 1$ и $\{T\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = (1 - 2\beta_\varepsilon) \cdot \beta_\varepsilon^4$ (здесь использовались результаты вычислений из примера 6 и тот факт, что $[\theta_{\mathbf{A}}^{-1}]_{\mathbf{A}} = \beta_\varepsilon^2$). Наконец,

$$rt_\varepsilon(M) = \frac{(1 + \varepsilon^2 \cdot \beta_\varepsilon^2) \cdot (1 + \varepsilon \cdot (\beta_\varepsilon^4 + 2))}{(\varepsilon + 2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пусть $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})$ — оснащённое обобщённое зацепление Хопфа с оснащением $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_k)$, и пусть $H_k^{f_1, \dots, f_k}$ — диаграмма этого оснащённого зацепления (см. рис. 30).

Хорошо известно (см. [22]), что многообразие $M_{(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})}$ является линзовым пространством $L_{p,q}$, где

$$\frac{p}{q} = f_1 - \frac{1}{f_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{f_k}}}.$$

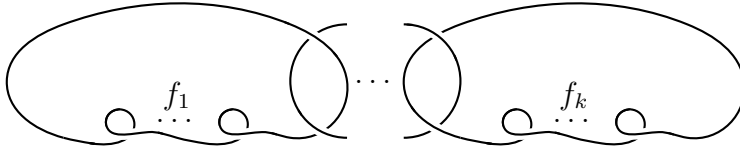


Рис. 30: Диаграмма $H_k^{f_1, \dots, f_k}$ оснащённого обобщённого зацепления Хопфа

Лемма 14. Пусть $\xi_{\mathbf{A}}$ — раскраска диаграммы $H_k^{f_1, \dots, f_k}$, которая каждую компоненту раскрашивает цветом \mathbf{A} . Тогда

$$\{H_k^{f_1, \dots, f_k}\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{(-1)^{k-1}}{\varepsilon^{k-2} \cdot \beta_{\varepsilon}^{2f_1 + \dots + 2f_k}}.$$

Доказательство. Основной подход аналогичен доказательству теоремы 7. Пусть $h_{f_i} \in \text{Hom}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ — морфизм, заузленная диаграмма которого изображена на рисунке 31.

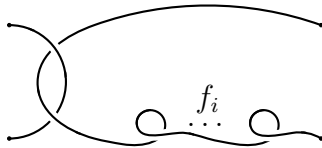


Рис. 31: Заузленная диаграмма морфизма h_{f_i}

Заметим, что композиция $\underbrace{\theta_{\mathbf{A}} \circ \dots \circ \theta_{\mathbf{A}}}_{f_i}$ является морфизмом из \mathbf{A} в \mathbf{A} , и следовательно задаётся числом $\frac{1}{\beta_{\varepsilon}^{2f_i}}$. Тогда

$$[h_{f_i}]_1 = \left(-\frac{1}{\varepsilon \cdot \beta_{\varepsilon}^{2f_i}}\right), \text{ и } [b_{\mathbf{A}} \circ \underbrace{(id_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ \dots \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}})}_{f_1 \text{ раз}}]_1 = \left(\frac{y\sqrt{\varepsilon}}{\beta_{\varepsilon}^{2f_1}}\right).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \{H_k^{f_1, \dots, f_k}\}_{\xi_{\mathbf{A}}} &= (b_{\mathbf{A}} \circ \underbrace{(id_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ \dots \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}})}_{f_1 \text{ раз}}) \circ h_{f_2} \circ \dots \circ h_{f_k} \circ d_{\mathbf{A}} \\ &= \frac{(-1)^{k-1} \cdot \varepsilon}{\varepsilon^{k-1} \cdot \beta_{\varepsilon}^{2f_1} \cdot \dots \cdot \beta_{\varepsilon}^{2f_k}}. \end{aligned}$$

□

Пусть $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ — последовательность натуральных чисел, отсортированная по возрастанию. Определим функцию

$$c: \{i_1, \dots, i_s\} \mapsto c(i_1, \dots, i_s)$$

следующим образом. Разобьём последовательность $\{i_1, \dots, i_s\}$ на максимальные подпоследовательности, состоящие из последовательных чисел (то есть число i содержится в подпоследовательности тогда и только тогда, когда либо $i-1$, либо $i+1$ содержатся в этой подпоследовательности). Пусть r — число получившихся подпоследовательностей, и пусть их длины равны l_1, \dots, l_r . Положим

$$c(i_1, \dots, i_s) = \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{l_j-1}}{\varepsilon^{l_j-2}}.$$

Пример 9. $c(1, 3) = \varepsilon^2$, так как последовательность $\{1, 3\}$ содержит две максимальных подпоследовательности: $\{1\}$ и $\{3\}$. Для каждой из них, $l_1 = l_2 = 1$, и следовательно оба множителя равны $\frac{(-1)^0}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon$.

$c(1, 2, 3, 4) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$, так как для последовательности $\{1, 2, 3, 4\}$: $r = 1$, $l_1 = 4$, и поэтому единственный множитель равен $\frac{(-1)^3}{\varepsilon^2}$.

$c(2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$, так как последовательность $\{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$ разбивается на три подпоследовательности: $\{2, 3, 4\}$ длины $l_1 = 3$, $\{6, 7\}$ длины $l_2 = 2$ и $\{9, 10, 11\}$ длины $l_3 = 3$. Таким образом,

$$c(2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 8. Пусть $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_k)$, и пусть $L_{p,q}$ — линзовое пространство, полученное в результате перестройки S^3 вдоль оснащённого зацепления $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})$. Тогда

$$rt_\varepsilon(L_{p,q}) = \frac{(1 + \varepsilon^2 \cdot \beta_\varepsilon^2)^\sigma}{(\varepsilon + 2)^{\frac{\sigma+k+1}{2}}} \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^k \left(\varepsilon^s \cdot \sum_{\{i_1, \dots, i_s\}} \frac{c(i_1, \dots, i_s)}{\beta_\varepsilon^{2f_{i_1} + \dots + 2f_{i_s}}} \right) \right),$$

где вторая сумма берётся по подмножествам $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ мощности s .

Доказательство. Пусть ξ — раскраска диаграммы $H_k^{f_1, \dots, f_k}$. Эта раскраска однозначно задаётся выбором подмножества $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Компоненты диаграммы $H_k^{f_1, \dots, f_k}$ с номерами из этого подмножества раскрашиваются цветом \mathbf{A} , а все остальные компоненты — цветом $\mathbf{1}$. Для этой раскраски $|\xi|_{\mathbf{A}} = s$. Из леммы 14 следует, что

$$\{H_k^{f_1, \dots, f_k}\}_\xi = \frac{c(i_1, \dots, i_s)}{\beta_\varepsilon^{2f_{i_1} + \dots + 2f_{i_s}}}.$$

Утверждение теоремы получается подстановкой полученных значений и значений констант Δ и D в формулу для инварианта rt_ε . \square

Предложение 2. Пусть $p \geq 1$, тогда $rt_\varepsilon(L_{p,q}) = rt_\varepsilon(L_{p+5q,q})$.

Доказательство. Заметим, что если $L_{p,q} = M_{(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})}$, где $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_k)$, то $L_{5q+p,q} = M_{(\mathbb{H}_k, \mathbb{F}')}$, где $\mathbb{F}' = (f_1 + 5, f_2, \dots, f_k)$. Непосредственно проверяется, что сигнатуры оснащённых зацеплений $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})$ и $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F}')$ совпадают. Далее, значение β_ε является корнем десятой степени из единицы, поэтому замена f_1 на $f_1 + 5$ не меняет итогового значения формулы инварианта rt_ε , сформулированной в теореме 8. \square

§ 4. Связь между инвариантами rt_ε и tv_ε

4.7 Инвариант tv_ε

В книге [2] описан явный алгоритм, который позволяет извлечь инвариант типа Тураева – Виро трёхмерных многообразий из любой модулярной категории. Инвариант tv_ε получается в результате применения этого алгоритма к категории \mathfrak{E} .

4.7.1 Модули $H(X, Y, Z)$

Для каждой тройки простых объектов $X, Y, Z \in I = \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$ обозначим $H^{XYZ} = \text{Hom}(\mathbf{1}, (X \otimes Y) \otimes Z)$. Это множество морфизмов H^{XYZ} обладает естественной структурой модуля над \mathbb{C} . Ясно, что модуль H^{XYZ} изоморфен \mathbb{C} тогда и только тогда, когда среди объектов X, Y, Z число объектов равных \mathbf{A} не равно одному (то есть либо $X = Y = Z = \mathbf{1}$, либо $X = Y = Z = \mathbf{A}$, либо два объекта равны \mathbf{A} , а третий — $\mathbf{1}$). Все остальные модули тривиальны. Будем говорить, что тройка (X, Y, Z) допустима, если соответствующий модуль H^{XYZ} не тривиален.

Для каждого $s \in \mathbb{C}$ и объекта X обозначим $u_s^X \in \text{Hom}(X, X)$ морфизм, который задаётся матрицами

$$[u_s^X]_{\mathbf{1}} = d(s, \dots, s) \text{ и } [u_s^X]_{\mathbf{A}} = d(s, \dots, s),$$

где матрица $[u_s^X]_{\mathbf{1}}$ является диагональной размера $|X|_{\mathbf{1}}$, а матрица $[u_s^X]_{\mathbf{A}}$ является диагональной размера $|X|_{\mathbf{A}}$.

Обозначим $v'_{\mathbf{1}} = 1$ и $v'_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon}$.

Для каждой тройки простых объектов $X, Y, Z \in I$ зададим два изоморфизма $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}: H^{XYZ} \rightarrow H^{YXZ}$ и $\mathcal{I}_{23}^{XYZ}: H^{XYZ} \rightarrow H^{XZY}$ следующим образом:

$$\mathcal{I}_{12}^{XYZ}(a) = a \circ (c_{X,Y} \otimes id_Z) \circ u_{v'_X v'_Y (v'_Z)^{-1}}^{(Y \otimes X) \otimes Z},$$

$$\mathcal{I}_{23}^{XYZ}(a) = a \circ \alpha_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes c_{Y,Z}) \circ \alpha_{X,Z,Y}^{-1} \circ u_{(v'_X)^{-1} v'_Y v'_Z}^{(X \otimes Z) \otimes Y}$$

для любого морфизма $a \in H^{XYZ}$.

Замечание 11. Заузленная диаграмма образа изоморфизма \mathcal{I}_{12}^{XYZ} изображена на рисунке 32 слева, а диаграмма образа изоморфизма \mathcal{I}_{23}^{XYZ} изображена на том же рисунке 32 справа.



Рис. 32: Изоморфизмы \mathcal{I}_{12}^{XYZ} (слева) и \mathcal{I}_{23}^{XYZ} (справа)

Предложение 3. Для каждой допустимой тройки (X, Y, Z) оба изоморфизма \mathcal{I}_{12}^{XYZ} и \mathcal{I}_{23}^{XYZ} тождественны.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от выбранной допустимой тройки (X, Y, Z) .

$X = Y = Z = \mathbf{1}$. В этом случае $\mathcal{I}_{12}^{111}(a) = a \circ (c_{1,1} \otimes id_1) \circ u_1^1 = a$, и $\mathcal{I}_{23}^{111}(a) = a \circ \alpha_{1,1,1} \circ (id_1 \otimes c_{1,1}) \circ \alpha_{1,1,1}^{-1} \circ u_1^1 = a$, так как $c_{1,1} = id_1$ и $\alpha_{1,1,1} = id_1$.

$X = \mathbf{1}, Y = Z = \mathbf{A}$. В этом случае $\mathcal{I}_{12}^{1AA}(a) = a \circ (c_{1,A} \otimes id_A) \circ u_1^{(1,A)} = a$, и $\mathcal{I}_{23}^{1AA}(a) = a \circ \alpha_{1,A,A} \circ (id_1 \otimes c_{A,A}) \circ \alpha_{1,A,A}^{-1} \circ u_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}^{(1,A)}}$. Диаграмма второй композиции изображена на рисунке 33.

$X = \mathbf{A}, Y = \mathbf{1}, Z = \mathbf{A}$. В этом случае $\mathcal{I}_{12}^{A1A}(a) = a \circ (c_{A,1} \otimes id_A) \circ u_1^{(1,A)} = a$, и $\mathcal{I}_{23}^{A1A}(a) = a \circ \alpha_{A,1,A} \circ (id_A \otimes c_{1,A}) \circ \alpha_{A,1,A}^{-1} \circ u_1^{(1,A)} = a$, так как $c_{A,1} = c_{1,A} = id_A$ и $\alpha_{A,1,A} = \alpha_{A,A,1} = id_{(1,A)}$.

$X = Y = \mathbf{A}, Z = \mathbf{1}$. В этом случае $\mathcal{I}_{12}^{AA1}(a) = a \circ (c_{A,A} \otimes id_1) \circ u_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}^{(1,A)}}$, и $\mathcal{I}_{23}^{AA1}(a) = a \circ \alpha_{A,A,1} \circ (id_A \otimes c_{A,1}) \circ \alpha_{A,1,A}^{-1} \circ u_1^{(1,A)} = a$. Диаграмма первой композиции изображена на рисунке 33.

$X = Y = Z = \mathbf{A}$. В этом случае $\mathcal{I}_{12}^{AAA}(a) = a \circ (c_{A,A} \otimes id_A) \circ u_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}^{(A,1,A)}}$ и $\mathcal{I}_{23}^{AAA}(a) = a \circ \alpha_{A,A,A} \circ (id_A \otimes c_{A,A}) \circ \alpha_{A,A,A}^{-1} \circ u_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}^{(A,1,A)}}$. Диаграмма первой

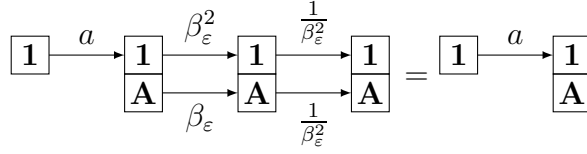


Рис. 33: Диаграмма композиций $a \circ \alpha_{\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}) \circ \alpha_{\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}}^{-1} \circ u_{\frac{1}{\beta_\epsilon}}^{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}$ и $a \circ (c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ u_{\frac{1}{\beta_\epsilon}}^{(\mathbf{1}, \mathbf{A})}$

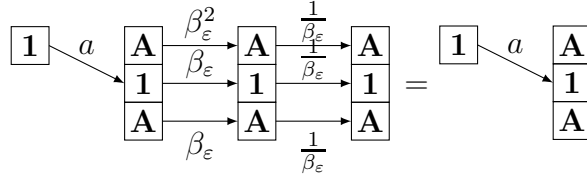


Рис. 34: Диаграмма композиции $a \circ (c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \circ u_{\frac{1}{\beta_\epsilon}}^{(\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})}$

композиции изображена на рисунке 34. Диаграмма второй композиции изображена на рисунке 35.

□

Для каждой допустимой тройки (X, Y, Z) модуль $H(X, Y, Z)$ получается отождествлением модулей $H^{XYZ}, H^{XZY}, H^{YXZ}, H^{YZX}, H^{ZXY}$ и H^{ZYX} посредством изоморфизмов, порождённых изоморфизмами \mathcal{I}_{12}^{XYZ} и \mathcal{I}_{23}^{XYZ} . Фактически, выбор элемента $a \in H(X, Y, Z)$ означает, что выбран один и тот же элемент a в каждом из шести модулей.

4.7.2 Спаривание

Пусть $w_{\mathbf{1}} \in Hom(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ — морфизм категории \mathfrak{E} , который задаётся числом 1 (то есть $w_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$), и пусть $w_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ — морфизм категории \mathfrak{E} , который задаётся произвольным ненулевым комплексным числом $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 15. Для любого простого объекта $X \in I$: $(w_X \otimes id_X) \circ d_X = (id_X \otimes w_X) \circ d_X$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно.

□

Для каждой допустимой тройки простых объектов (X, Y, Z) зададим спаривание $(\cdot, \cdot)^{XYZ}: H(X, Y, Z) \times H(X, Y, Z) \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом. Для любых двух элементов $a, b \in H(X, Y, Z)$ значение $(a, b)^{XYZ}$ совпадает

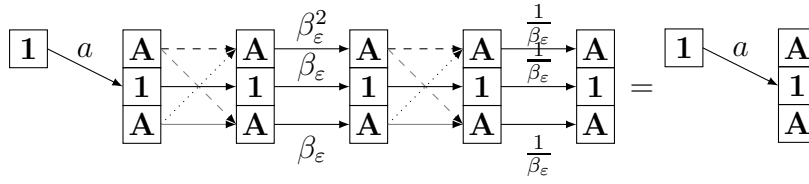


Рис. 35: Диаграмма композиции $a \circ \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A}, \mathbf{A}}) \circ \alpha_{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}}^{-1} \circ u_{\frac{1}{\beta_\epsilon}}^{(\mathbf{A}, \mathbf{1}, \mathbf{A})}$

с морфизмом, изображённым на рисунке 36. Этот морфизм является морфизмом из $\mathbf{1}$ в $\mathbf{1}$, а следовательно его можно отождествить с комплексным числом.

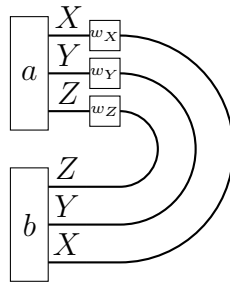


Рис. 36: Заузленная диаграмма морфизма, задающего спаривание $(a, b)^{XYZ}$

Теорема 9. $(a, b)^{\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1}} = ab$, $(a, b)^{\mathbf{1}\mathbf{A}\mathbf{A}} = aby^2z^2$ и $(a, b)^{\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}} = abxy^3z^3$.

Доказательство. Для любой тройки простых объектов (X, Y, Z) и любых $a, b \in H(X, Y, Z)$ морфизм $(a, b)^{XYZ}$ представляется в виде композиции $\mu_1 \circ \dots \circ \mu_9$ девяти морфизмов, где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a \otimes b, \\ \mu_2 &= ((w_X \otimes w_Y) \otimes w_Z) \otimes ((id_Z \otimes id_Y) \otimes id_X), \\ \mu_3 &= \alpha_{(X \otimes Y) \otimes Z, Z \otimes Y, X}^{-1}, \\ \mu_4 &= \alpha_{(X \otimes Y) \otimes Z, Z, Y}^{-1} \otimes id_X, \\ \mu_5 &= (\alpha_{X \otimes Y, Z, Z} \otimes id_Y) \otimes id_X, \\ \mu_6 &= (((id_X \otimes id_Y) \otimes d_Z) \otimes id_Y) \otimes id_X, \\ \mu_7 &= \alpha_{X, Y, Y} \otimes id_X, \\ \mu_8 &= (id_X \otimes d_Y) \otimes id_X, \\ \mu_9 &= d_X. \end{aligned}$$

Выражения для морфизмов μ_i , $i = 1, \dots, 9$, получаются в результате выбора разбиения диаграммы, изображённой на рисунке 36, вертикальными прямыми на элементарные слои.

Утверждение теоремы получается в результате аккуратного вычисления всех этих морфизмов для трёх различных случаев, когда тройка (X, Y, Z) совпадает с одной из троек $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ или $(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A})$. \square

4.7.3 $6j$ -символы

Для любой совокупности простых объектов $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \in I$ определим $6j$ -символ

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| : H(X_1, Y_1, Z_1) \otimes H(X_1, Y_2, Z_2) \\ \otimes H(Y_1, Z_2, X_2) \otimes H(Z_1, X_2, Y_2) \rightarrow \mathbb{C}$$

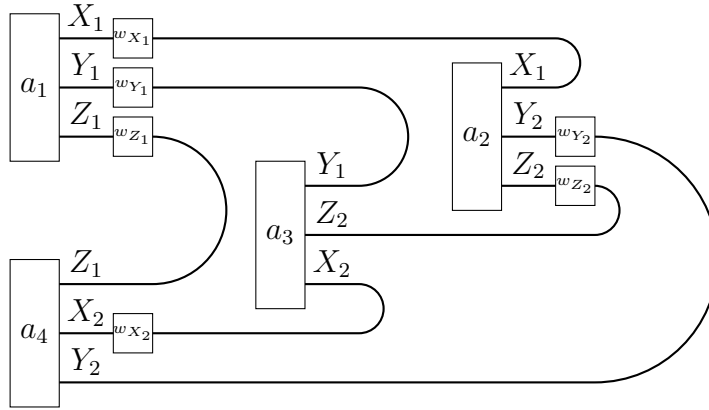
следующим образом. Если хотя бы одна из троек (X_1, Y_1, Z_1) , (X_1, Y_2, Z_2) , (Y_1, Z_2, X_2) , (Z_1, X_2, Y_2) не является допустимой, то один из соответствующих модулей тривиален, и в этом случае положим $6j$ -символ тривиальным. Если все тройки (X_1, Y_1, Z_1) , (X_1, Y_2, Z_2) , (Y_1, Z_2, X_2) и (Z_1, X_2, Y_2) допустимы, то каждый из четырёх модулей $H(X_1, Y_1, Z_1)$, $H(X_1, Y_2, Z_2)$, $H(Y_1, Z_2, X_2)$ и $H(Z_1, X_2, Y_2)$ изоморфен \mathbb{C} . В этом случае $6j$ -символ сопоставляет элементу $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4$, для всех $a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$, $a_2 \in H(X_1, Y_2, Z_2)$, $a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$, $a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$, значение морфизма, изображённого на рисунке 37. Этот морфизм является морфизмом из $\mathbf{1}$ в $\mathbf{1}$, следовательно задаётся одним комплексным числом. Это число задаёт образ

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4).$$

Замечание 12. Все $6j$ -символы симметричны в следующем смысле: для любой совокупности простых объектов $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \in I$ и элементов $a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$, $a_2 \in H(X_1, Y_2, Z_2)$, $a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$, $a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$ справедливо

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \left| \begin{array}{ccc} X_1 & Z_2 & Y_2 \\ X_2 & Z_1 & Y_1 \end{array} \right| (a_2 \otimes a_1 \otimes a_3 \otimes a_4) = \\ = \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & Y_2 & X_2 \\ Z_2 & Y_1 & X_1 \end{array} \right| (a_4 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3).$$

Теорема 10. Все нетривиальные $6j$ -символы имеют следующий вид:

Рис. 37: Заузленная диаграмма $6j$ -символа

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4,$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{y^3 z^3}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{y^4 z^4}{\varepsilon},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{xy^5 z^5}{\varepsilon},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{x^2 y^6 z^6}{-\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Для любых простых объектов $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$, задающих нетривиальный $6j$ -символ, и для любых $a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$, $a_2 \in H(X_1, Y_2, Z_2)$, $a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$, $a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$ морфизм

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4)$$

представляется в виде композиции $\mu_1 \circ \dots \circ \mu_{21}$, где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1 \otimes a_4, \\ \mu_2 &= ((w_{X_1} \otimes w_{Y_1}) \otimes w_{Z_1}) \otimes ((id_{Z_1} \otimes w_{X_2}) \otimes id_{Y_2}), \\ \mu_3 &= \alpha_{(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1, Z_1 \otimes X_2, Y_2}^{-1}, \\ \mu_4 &= \alpha_{(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1, Z_1, X_2}^{-1} \otimes id_{Y_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_5 &= (\alpha_{X_1 \otimes Y_1, Z_1, Z_1} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_6 &= (((id_{X_1} \otimes id_{Y_1}) \otimes d_{Z_1}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_7 &= (((id_{X_1} \otimes id_{Y_1}) \otimes a_3) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_8 &= (\alpha_{X_1 \otimes Y_1, Y_1 \otimes Z_2, X_2}^{-1} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_9 &= ((\alpha_{X_1 \otimes Y_1, Y_1, Z_2}^{-1} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{10} &= (((\alpha_{X_1, Y_1, Y_1} \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{11} &= (((id_{X_1} \otimes d_{Y_1}) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2} \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{12} &= \alpha_{X_1 \otimes Z_2, X_2, X_2} \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{13} &= ((id_{X_1} \otimes id_{Z_2}) \otimes d_{X_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{14} &= ((id_{X_1} \otimes a_2) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{15} &= ((id_{X_1} \otimes ((id_{X_1} \otimes w_{Y_2}) \otimes w_{Z_2})) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{16} &= \alpha_{X_1, (X_1 \otimes Y_2) \otimes Z_2, Z_2} \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{17} &= (id_{X_1} \otimes \alpha_{X_1 \otimes Y_2, Z_2, Z_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{18} &= (id_{X_1} \otimes ((id_{X_1} \otimes id_{Y_2}) \otimes d_{Z_2})) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{19} &= \alpha_{X_1, X_1, Y_2}^{-1} \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{20} &= (d_{X_1} \otimes id_{Y_2}) \otimes id_{Y_2}, \\
\mu_{21} &= d_{Y_2}.
\end{aligned}$$

Выражения для морфизмов μ_i , $i = 1, \dots, 21$, так же как в доказательстве теоремы 9, получаются в результате выбора разбиения диаграммы, изображённой на рисунке 37, вертикальными прямыми на элементарные слои.

Утверждение теоремы получается в результате аккуратного вычисления всех этих морфизмов для всех возможных комбинаций простых объектов $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \in I$. \square

4.7.4 Специальные спайны и инвариант tv_ε

В книге [2] конструкция инвариантов типа Тураева – Виро, возникающих из модулярных категорий, использует триангуляции трёхмерных многообразий. Мы будем использовать двойственный подход и опишем инвариант tv_ε с помощью специальных спайнов трёхмерных многообразий.

Двумерный полиэдр P называется специальным, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен либо окружности (рис. 38 слева, такие точки называются регулярными), либо окружности с диаметром (рис. 38 в центре, такие точки называются тройными точками), или окружности с двумя диаметрами (рис. 38 справа, такие точки называются истинными вершинами);

2. Объединение всех тройных точек является несвязным объединением открытых интервалов, которые называются тройными линиями;
3. Объединение всех регулярных точек является несвязным объединением открытых двумерных дисков, которые называются 2-компонентами.

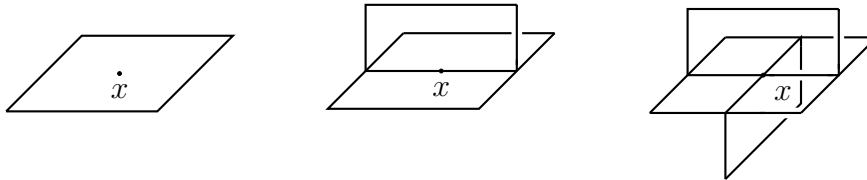


Рис. 38: Регулярная точка (слева), тройная точка (в центре), истинная вершина (справа)

Специальный полиэдр $P \subset M$ называется специальным спайном замкнутого трёхмерного многообразия M , если его дополнение $M \setminus P$ гомеоморфно открытому трёхмерному шару. Для наших целей достаточно ограничиться случаем замкнутых трёхмерных многообразий, поэтому нам не требуется общего определения спайна для произвольных трёхмерных многообразий.

Теперь мы готовы определить инвариант tv_ε . Пусть P — специальный спайн замкнутого трёхмерного многообразия M . Обозначим $\mathcal{V}(P)$ множество истинных вершин, $\mathcal{E}(P)$ множество тройных рёбер, и $\mathcal{C}(P)$ множество 2-компонент специального спайна P . Под раскраской спайна P будем понимать отображение $\zeta: \mathcal{C}(P) \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$. Определим вес $\{P\}_\zeta$ следующим образом. Каждой истинной вершине $v \in \mathcal{V}(P)$ сопоставим $6j$ -символ $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, где X_1, X_2, X_3 — цвета 2-компонент, инцидентных одной тройной линии в окрестности истинной вершины v , а X_2, Y_2, Z_2 — цвета противоположных им компонент (рис. 39 слева). Здесь используются $6j$ -символы, определённые в теореме 10. Тогда вес $\{P\}_\zeta$ — это результат свёртки всех этих тензоров, сопоставленных всем истинным вершинам. Свёртка осуществляется с помощью спаривания, определённого в теореме 9.

Эквивалентным образом значение веса $\{P\}_\zeta$ можно определить следующим образом. Пусть X, Y, Z — цвета трёх 2-компонент, примыкающих к одной тройной линии. Сопоставим ей значение, обратное результату спаривания $(1, 1)^{XYZ}$ (рис. 39 справа). Тогда вес $\{P\}_\zeta$ равен произведению этих значений, сопоставленных каждой тройной линии, и значений

$6j$ -символов, сопоставленных всем истинным вершинам, вычисленных на аргументе $1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$. Данное определение веса $\{P\}_\zeta$ действительно эквивалентно предыдущему. В самом деле, так как все нетривиальные модули $H(X, Y, Z)$ одномерны, то свёртка $6j$ -символов представляет собой простое произведение их координат, то есть значений этих тензоров на аргументе $1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$, разделённое на коэффициенты спаривания.

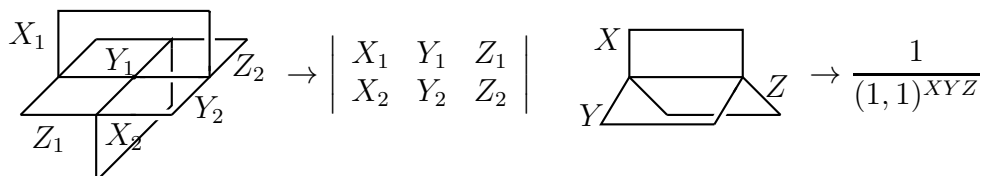


Рис. 39: $6j$ -символ соответствует истинной вершине (слева), значение, обратное результату спаривания, соответствует тройной линии (справа)

Пусть ζ — раскраска специального спайна P . Обозначим $|\zeta|_{\mathbf{A}}$ число 2-компонент, покрашенных цветом \mathbf{A} . Тогда определим

$$tv_\varepsilon(P) = \sum_{\zeta} \varepsilon^{|\zeta|_{\mathbf{A}}} \cdot \{P\}_\zeta,$$

где суммирование берётся по всем раскраскам спайна P .

Наше определение инварианта типа Тураева – Виро отличается от общего определения, изложенного в [2, Параграф VII.1.3]. Мы не используем множитель $\frac{1}{D^{2V}}$, где V — число вершин в триангуляции многообразия. В нашем случае дополнение к спайну в многообразии всегда является открытым трёхмерным шаром, поэтому этот множитель можно опустить.

Теорема 11. Пусть P_1 и P_2 — два специальных спайна замкнутого трёхмерного многообразия M . Тогда $tv_\varepsilon(P_1) = tv_\varepsilon(P_2)$.

Доказательство. Следует из [2, Теорема VII.1.4]. □

Таким образом, корректно определено значение $tv_\varepsilon(M)$, равное $tv_\varepsilon(P)$ для любого специального спайна P замкнутого трёхмерного многообразия M .

Теорема 12. Для любого замкнутого трёхмерного многообразия M :

$$|rt_\varepsilon(M)|^2 = \frac{tv_\varepsilon(M)}{\varepsilon + 2}.$$

Доказательство. Следует из [2, Теорема VII.4.1.1]. □

4.8 ε -инвариант

Существует несколько эквивалентных способов определить ε -инвариант для трёхмерных многообразий (см. [21, Глава 8]). Будем использовать подход, близкий к определению инварианта tv_ε .

Пусть P — специальный спайн замкнутого трёхмерного многообразия M , и пусть $\eta: \mathcal{C}(P) \rightarrow \{0, 1\}$ — раскраска спайна P в два цвета: 0 и 1. Определим вес каждого цвета следующим образом: $\omega_0 = 1$ и $\omega_1 = \varepsilon$, где, как и ранее, $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

Пусть $v \in \mathcal{V}(P)$ — истинная вершина специального спайна P . Окрестность этой вершины содержит шесть 2-компонент. Пусть $i, j, k \in \{0, 1\}$ — цвета 2-компонент, инцидентных одной тройной линии в окрестности вершины v , и пусть l, m, n — цвета противоположных им 2-компонент. Определим вес ω_v истинной вершины v с помощью $6j$ -символов следующим образом:

$$\omega_v = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array} \right|',$$

где

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|' = 1, \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right|' = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|' = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|' = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

и $\omega_v = 0$ во всех остальных случаях.

Здесь мы используем $6j$ -символы со штрихом, чтобы не путать их с $6j$ -символами, которые использовали раньше. Значение ε -инварианта (который обозначается t) для трёхмерного многообразия M определяется следующим образом:

$$t(M) = \sum_{\eta} \left(\prod_{c \in \mathcal{C}(P)} \omega_{\eta(c)} \cdot \prod_{v \in \mathcal{V}(P)} \omega_v \right),$$

где сумма берётся по всем раскраскам специального спайна P замкнутого трёхмерного многообразия M .

Теорема 13. *Для любого замкнутого трёхмерного многообразия M*

$$tv_\varepsilon(M) = t(M).$$

Доказательство. Основной этап в доказательстве теоремы состоит в том, чтобы показать, что значение $tv_\varepsilon(M)$ не зависит от выбора параметров x, y и z , использующихся при построении.

Пусть P — специальный спайн многообразия M , и пусть $\zeta: \mathcal{C}(P) \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$ — нетривиальная раскраска (то есть $\{P\}_\zeta \neq 0$). Разобьём все истинные вершины специального спайна P на пять классов, в зависимости от того, сколько смежных с ними 2-компонент раскрашено цветом \mathbf{A} . Пусть k_0 — число истинных вершин, для которых все смежные 2-компоненты покрашены цветом $\mathbf{1}$, k_1 — число истинных вершин, для которых ровно три смежных 2-компонента покрашены цветом \mathbf{A} , k_2 — число истинных вершин, для которых ровно четыре смежных 2-компонента покрашены цветом \mathbf{A} , k_3 — число истинных вершин, для которых ровно пять смежных 2-компонент покрашены цветом \mathbf{A} , и, наконец, k_4 — число истинных вершин, для которых все смежные 2-компоненты покрашены цветом \mathbf{A} . Тогда

$$\{P\}_\zeta = \left(\frac{y^3 z^3}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{y^4 z^4}{\varepsilon}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{xy^5 z^5}{\varepsilon}\right)^{k_3} \cdot \left(-\frac{x^2 y^6 z^6}{\varepsilon^2}\right)^{k_4} \\ \cdot \left(\frac{1}{xy^3 z^3}\right)^{k_3+2k_4} \cdot \left(\frac{1}{z^2 y^2}\right)^{\frac{3}{2}k_1+2k_2+k_3}.$$

Последние два множителя соответствуют тройным линиям спайна P . Число тройных линий, для которых ровно одна смежная 2-компонента покрашена цветом $\mathbf{1}$, равно $\frac{3}{2}k_1 + 2k_2 + k_3$, а число тройных линий, для которых все три смежных 2-компонента покрашены цветом \mathbf{A} , равно $k_3 + 2k_4$.

В выражении для значения $\{P\}_\zeta$ общая степень параметра x равна $k_3 + 2k_4 - k_3 - 2k_4 = 0$, и общие степени параметров y и z одинаковые и равны $3k_1 + 4k_2 + 5k_3 + 6k_4 - 3k_3 - 6k_4 - 3k_1 - 4k_2 - 2k_3 = 0$.

Таким образом, значение $\{P\}_\zeta$ не зависит от выбора значений параметров $x, y, z \in \mathbb{C}$. Поэтому можно взять $x = y = z = 1$, и тогда формула для значения $tv_\varepsilon(M)$ в точности совпадает с формулой для значения $t(M)$ (после замены $\mathbf{1}$ на 0 и \mathbf{A} на 1). \square

Пример 10. Инвариант rt_ε сильнее инварианта tv_ε . Хорошо известно, что существует только четыре разных значения ε -инварианта для линзовых пространств ([15], [21, Теорема 8.1.28]).

Непосредственно вычисляется, что $tv_\varepsilon(L_{1,1}) = tv_\varepsilon(L_{4,1}) = 1$, но

$$rt_\varepsilon(L_{1,1}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+2}} \in \mathbb{R} \text{ и } rt_\varepsilon(L_{4,1}) = \frac{(\varepsilon+1) \cdot (1+\beta_\varepsilon)^2}{(\varepsilon+2)^{\frac{3}{2}}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Таким образом, $rt_\varepsilon(L_{1,1}) \neq rt_\varepsilon(L_{4,1})$.

Список литературы

1. Turaev V. Modular categories and 3-manifold invariants // *Int. J. Mod. Phys. B*. 1992. V.06, N 11n12. P.1807–1824.
2. Turaev V. G. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. De Gruyter Studies in Mathematics, 2016.
3. Turaev V., Virelizier A. *Monoidal Categories and Topological Field Theory*. Birkhäuser Cham, Progress in Mathematics, 2017.
4. Bakalov B., Kirillov A. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. American Mathematical Society, University Lecture Series, 2000.
5. Reshetikhin N., Turaev V. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // *Invent. Math.* 1991. V. 103, N 3. P. 547–597.
6. Turaev V., Viro O. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // *Topology*. 1992. V. 31, N 4. P. 865–902.
7. Etingof P., Nikshych D., Ostrik V. On fusion categories // *Ann. Math. (2)*. 2005. V. 162, N 2. P. 581–642.
8. Etingof P., Calaque D. *Lectures on tensor categories*. IRMA Lectures on Mathematics and Theoretical Physics 12, 2008.
9. Etingof P., Nikshych D., Ostrik V. Fusion categories and homotopy theory // *Quantum Topol.* 2010. V. 1. P. 209–273.
10. Rowell E., Stong R., Wang Z. On classification of modular tensor categories // *Commun. Math. Phys.* 2009. V. 292, N 2. P. 343–389.
11. Field B., Simula T. Introduction to topological quantum computation with non-Abelian anyons // *Quantum Sci. Technol.* 2018. V. 3, N 4.
12. Wang Z. Topological Quantum Computation // *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.* 2010. V. 112. P. 115.
13. Ostrik V. Fusion categories of rank 2 // *Math. Res. Lett.* 2003. V. 10, N 2. P. 177–183.
14. Mac Lane S. Natural associativity and commutativity // *Rice University Studies*. 1963. V. 49. P. 28–46.

15. Матвеев С. В., Овчинников М. А., Соколов М. В. Построение и свойства t -инварианта // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2000. Т. 267. С. 207–219.
16. Matveev S. V. Complexity theory of three-dimensional manifolds // *Acta Appl. Math.* 1990. V. 19. P. 101–130.
17. Веснин А. Ю., Фоминых Е. А. О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем // *Сиб. матем. журн.* 2012. Т. 53, № 4. С. 781–793.
18. Веснин А. Ю., Тураев В. Г., Флминых Е. А. Трехмерные многообразия с бедными спайнами // *Тр. МИАН*. 2015. Т. 288. С. 29–38.
19. Kirby R., Melvin P. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$ // *Invent. Math.* 1991. V. 105. P. 473–545.
20. Etingof P., Gelaki S., Nikshych D., Ostrik V. *Tensor Categories*. American Mathematical Society, 2010.
21. Matveev S. *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*. Berlin, Springer, 2007.
22. Прасолов В. В., Сосинский А. Б. *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. М.: МЦНМО, 1997.

References

1. Turaev V. Modular categories and 3-manifold invariants // *Int. J. Mod. Phys. B*. 1992. V. 06, N 11n12. P. 1807–1824.
2. Turaev V. G. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. De Gruyter Studies in Mathematics, 2016.
3. Turaev V., Virelizier A. *Monoidal Categories and Topological Field Theory*. Birkhäuser Cham, Progress in Mathematics, 2017.
4. Bakalov B., Kirillov A. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. American Mathematical Society, University Lecture Series, 2000.
5. Reshetikhin N., Turaev V. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // *Invent. Math.* 1991. V. 103, N 3. P. 547–597.
6. Turaev V., Viro O. State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols // *Topology*. 1992. V. 31, N 4. P. 865–902.

7. Etingof P., Nikshych D., Ostrik V. On fusion categories // *Ann. Math. (2)*. 2005. V. 162, N 2. P. 581–642.
8. Etingof P., Calaque D. *Lectures on tensor categories*. IRMA Lectures on Mathematics and Theoretical Physics 12, 2008.
9. Etingof P., Nikshych D., Ostrik V. Fusion categories and homotopy theory // *Quantum Topol.* 2010. V. 1. P. 209–273.
10. Rowell E., Stong R., Wang Z. On classification of modular tensor categories // *Commun. Math. Phys.* 2009. V. 292, N 2. P. 343–389.
11. Field B., Simola T. Introduction to topological quantum computation with non-Abelian anyons // *Quantum Sci. Technol.* 2018. V. 3, N 4.
12. Wang Z. Topological Quantum Computation // *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.* 2010. V. 112. P. 115.
13. Ostrik V. Fusion categories of rank 2 // *Math. Res. Lett.* 2003. V. 10, N 2. P. 177–183.
14. Mac Lane S. Natural associativity and commutativity // *Rice University Studies*. 1963. V. 49. P. 28–46.
15. Matveev S. V., Ovchinnikov M. A., Sokolov M. V. Construction and properties of the t -invariant // *J. Math. Sci.* 2003. V. 113, N 6. P. 849–855.
16. Matveev S. V. Complexity theory of three-dimensional manifolds // *Acta Appl. Math.* 1990. V. 19. P. 101–130.
17. Vesnin A. Yu., Fominykh E. A. On complexity of three-dimensional hyperbolic manifolds with geodesic boundary // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 4. P. 625–634.
18. Vesnin A. Yu., Turaev V. G., Fominykh E. A. Three-dimensional manifolds with poor spines // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. V. 288. P. 29–38.
19. Kirby R., Melvin P. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$ // *Invent. Math.* 1991. V. 105. P. 473–545.
20. Etingof P., Gelaki S., Nikshych D., Ostrik V. *Tensor Categories*. American Mathematical Society, 2010.

21. Matveev S. *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*. Berlin, Springer, 2007.
22. Prasolov V. V., Sossinsky A. B. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*. American Mathematical Society, 1996.

Информация об авторе

Филипп Глебович Кораблёв, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN-код: 9326-3294, AuthorID: 163123
Scopus Author ID 56499526200

Author Information

Philipp G. Korablev, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN: 9326-3294, AuthorID: 163123
Scopus Author ID 56499526200

*Статья поступила в редакцию 21.05.2024;
одобрена после рецензирования 10.01.2025; принята к публикации
29.01.2025*

*The article was submitted 21.05.2024;
approved after reviewing 10.01.2025; accepted for publication 29.01.2025*