Научная статья
УДК 517.954
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-102-123

ОДНА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПРОСТРАНСТВА

Валентина Владимировна Шеметова

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

valentina501@mail.ru

Аннотация

В статье исследуется смешанная краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства. Это уравнение относится к классу уравнений с частными производными, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Устанавливаются достаточные условия на правую часть рассматриваемого уравнения, обеспечивающие разрешимость смешанной задачи в соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

Ключевые слова и фразы

псевдогиперболическое уравнение, смешанная краевая задача, анизотропное соболевское пространство.

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, https://rscf.ru/project/24-21-00370/

Для цитирования

Шеметова В.В. Одна краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 102-123. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-102-123

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 102-123
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 102-123

One boundary value problem for a pseudohyperbolic equation in a quarter-space

Valentina V. Shemetova

Novosibirsk state university, Novosibirsk, Russia

valentina501@mail.ru

Abstract

An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation in a quarter-space is studied in this article. This equation belongs to a class of partial differential equations not solvable with respect to the highest-order time-derivative. We obtain sufficient conditions for the right-hand side of the given equation under which the initial-boundary value problem is solvable in Sobolev spaces with an exponential weight.

Keywords

pseudohyperbolic equation, initial-boundary value problem, anisotropic Sobolev space.

Funding

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant № 24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370

For citation

Shemetova V. V. One boundary value problem for a pseudohyperbolic equation in a quarter-space// *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 102-123. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-102-123

§ 1. Введение и постановка задачи

В статье рассматривается дифференциальное уравнение в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++} = \{t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$

$$(\varepsilon\mathbb{I} - \Delta)D_t^2 u + \Delta^2 u = f(t, x), \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным x, $\mathbb{I}$ — тождественный оператор, $\varepsilon > 0$. Это уравнение является уравнением, не разрешенным относительно старшей производной по времени. Уравнения вида (1) в литературе часто называют уравнениями соболевского типа, так как именно работы С.Л. Соболева [1] положили начало систематическому исследованию подобного типа уравнений. Следует отметить, при одной пространственнной переменной уравнение (1) возникает при моделировании крутильных колебаний упругих стержней [2, 3], в литературе закрепилось название для него, как уравнение Власова.

Впервые классификация линейных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной была введена в монографии [4]. В частности, был введён класс псевдогиперболических дифференциальных уравнений и для них была изучена задача Коши. Эти исследования были продолжены в работах [5, 6, 7, 8]. Теория краевых задач для псевдогиперболических уравнений, в отличие от классических гиперболических уравнений, только начинает развиваться. На сегодняшний день есть ряд результатов по конкретным постановкам задач (см., например, [9, 10]).

В рамках данной работы продолжается изучение смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений, начатых в [11, 12]. Рассматривается смешанная задача в четверти пространства

$$
\begin{gathered}
(\varepsilon\mathbb{I} - \Delta)D_t^2 u + \Delta^2 u = f(t,x), \quad \varepsilon > 0, \\
x = (x', x_n) \;\; x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \quad t > 0, \\
u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \\
u|_{x_n=0} = 0, \quad D_{x_n} u|_{x_n=0} = 0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Для неё будет доказана однозначная разрешимость в анизотропном весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$.

§ 2. Полученный результат

Прежде чем перейти к изложению основного результата, требуется ввести ряд вспомогательных определений, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Ниже приведем определение анизотропного соболевского пространства $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$ (см., например, [13]).

Определение 1. Функция $u(t,x)$ *принадлежит анизотропному соболевскому пространству* $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$, если существуют обобщённые производные $D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t,x)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в области G при

$$
\frac{\alpha_0}{l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} \leq 1,
$$

и $D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t,x) \in L_2(G)$. Норма в $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$ имеет вид

$$\|u(t,x), W_2^{l,\mathbf{r}}(G)\| = \sum_{\alpha_0/l + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i/r_i \le 1} \|D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t,x), L_2(G)\|.$$

Определение 2. Функция $u(t,x)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G)$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, если функция $e^{-\gamma t} u(t,x)$ принадлежит пространству $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$. Норма в $W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G)$ имеет вид

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G)\| = \|e^{-\gamma t} u(t,x), W_2^{l,\mathbf{r}}(G)\|.$$

В случае если $l = 0$ норма в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{0,\mathbf{r}}(G)$ имеет вид

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{0,\mathbf{r}}(G)\| = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i/r_i \le 1} \|D_x^{\alpha} u(t,x), L_2(G)\|.$$

В пространстве $W_{2,\gamma}^{l,0}(G)$ норма задается следующим образом

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{l,0}(G)\| = \sum_{\alpha_0 \le l} \|D_t^{\alpha_0} u(t,x), L_2(G)\|.$$

Сформулируем условие Лопатинского для задачи (2). Для этого рассмотрим краевую задачу на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau > 0\}$ и параметром $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{array}{l} L(\tau, i\xi', D_{x_n})v = 0, \quad x_n > 0, \\ v|_{x_n=0} = \psi_1, \quad D_{x_n} v|_{x_n=0} = \psi_2, \\ v \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{array} \tag{3}$$

где $L(\tau, i\xi', D_{x_n}) = \tau^2\big(\varepsilon + |\xi'|^2 - D_{x_n}^2\big) + \big(|\xi'|^4 - 2|\xi'|^2 D_{x_n}^2 + D_{x_n}^4\big)$, $\varepsilon > 0$.

Определение 3. Смешанная задача (2) *удовлетворяет условию Лопатинского*, если краевая задача (3) однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2.

Напомним условия однозначной разрешимости задачи (3). Нетрудно убедиться в том, что характерестическое уравнение для дифференциального оператора $L(\tau, i\xi', D_{x_n})$ имеющее вид

$$L(\tau, i\xi', \lambda) = \tau^2\big(\varepsilon + |\xi'|^2 - \lambda^2\big) + \big(|\xi'|^4 - 2|\xi'|^2\lambda^2 + \lambda^4\big), \tag{4}$$

не имеет корней на мнимой оси. Обозначим через $\lambda_1^-(\tau,\xi')$ и $\lambda_2^-(\tau,\xi')$ корни характеристического уравнения (4), лежащие в левой полуплоскости, $\lambda_1^+(\tau,\xi')$ и $\lambda_2^+(\tau,\xi')$ корни характеристического уравнения (4), лежащие в правой полуплоскости. Поскольку в левой полуплоскости лежат два корня уравнения (4), то, очевидно, что условие Лопатинского для задачи (2) выполняется. Следовательно, краевая задача (3) однозначно разрешима.

Теорема. *Пусть* $\gamma_0 > 0$, *что для любой* $f(t,x)$ *из пространства* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ *такой, что* $f(t,x)|_{t=0} = D_t f(t,x)|_{t=0} = 0$, *тогда задача* (2) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *таких, что* $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\ldots,n$, *и для решения* $u(t,x)$ *справедлива оценка:*

$$\big\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\big\| + \sum_{i=1}^{n} \big\|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\big\| \\ \le c(\gamma_0)\big\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\big\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

При доказательстве теоремы будет использована обобщенная теорема Пэли-Винера [4, 14].

Предположим, что функция $w(\tau,x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ принадлежит $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma)$, $\mathbb{C}^+_\gamma = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau > \gamma\}$, то есть

а) для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ функция $w(\tau,x)$ — аналитическая в $\mathbb{C}^+_\gamma$;

б) $\sup\limits_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |w(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty$.

Введем в данном пространстве норму

$$\sup_{\sigma>\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |w(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем полученное линейное нормированное пространство будем обозначать $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)$. Рассмотрим множество функций $w(\tau,x',x_n)$, принадлежащих при почти всех $(x',x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ пространству $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)$, для которых справедливо

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |i\eta+\sigma|^{2\alpha_0} |\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta < \infty, \quad \alpha_0 \le l,$$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^r |\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta < \infty,$$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^r_{x_n} \hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta < \infty,$$

где $\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)$ — частичное преобразование Фурье по x' функции $w(i\eta+\sigma,x',x_n)$.

Введём на нём норму

$$\sup_{\sigma>\gamma}\Bigg[\sum_{a_0=0}^{l}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|i\eta+\sigma|^{2\alpha_0}|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}$$

$$+\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^r|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}$$

$$+\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|D_{x_n}^r\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}\Bigg].$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать символом $\widetilde{W}_2^{l,\mathbf{r}}(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)$.

Обобщенная теорема Пэли–Винера. *Интегральный оператор Лапласа $\mathfrak{L}$ отображает пространство функций из $W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$ таких, что*

$$D_t^k u|_{t=0}=0,\quad k=0,\cdots,l-1,$$

на $\widetilde{W}_2^{l,\mathbf{r}}(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

§ 3. Доказательство теоремы

Для доказательства разрешимости рассмотрим вспомогательную краевую задачу в полупространстве с параметрами $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$ и $\tau\in\mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma>\gamma_0$, для обыкновенного дифференциального уравнения, которая получается после формального применения оператора Фурье по касательным пространственным переменным x' и оператора Лапласа по временной переменной t к рассматриваемой задаче (2)

$$\begin{gathered}D_{x_n}^4 v-\big(\tau^2+2|\xi'|^2\big)D_{x_n}^2 v+\big(\varepsilon\tau^2+|\xi'|^2\tau^2+|\xi'|^4\big)v=F(\tau,\xi',x_n),\\ x_n>0,\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \tau\in\mathbb{C}_\gamma^+,\\ v\big|_{x_n=0}=0,\quad D_{x_n}v\big|_{x_n=0}=0,\\ v\in W^4(\mathbb{R}_+),\end{gathered}\tag{5}$$

где $F(\tau,\xi',x_n)$ — преобразование Фурье по переменным x' и преобразование Лапласа по переменной t от функции $f(t,x',x_n)$. Дальнейшая цель состоит в том, чтобы показать, что задача (5) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W_2^4(\mathbb{R}_+)$ с параметрами $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$.

Представим решение краевой задачи (5) в виде

$$v(\tau,\xi',x_n) = v_0(\tau,\xi',x_n) + v_1(\tau,\xi',x_n), \tag{6}$$

где $v_0(\tau,\xi',x_n)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &L(\tau,i\xi',D_{x_n})v_0 = \tilde f(\tau,\xi',x_n), \quad x_n > 0,\\ &v_0 \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \tag{7}$$

в свою очередь $v_1(\tau,x)$ представляет собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &L(\tau,i\xi',D_{x_n})v_1 = 0, \quad x_n > 0,\\ &v_1|_{x_n=0} = -v_0|_{x_n=0} = \psi_1(\tau,\xi'),\\ &D_{x_n}v_1|_{x_n=0} = -D_{x_n}v_0|_{x_n=0} = \psi_2(\tau,\xi'),\\ &v_1 \in W_2^4(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \tag{8}$$

Решение уравнения (7), следуя [4], можно записать в виде:

$$v_0(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_0^{x_n} J_-(\tau,\xi',x_n-s)\tilde f(\tau,\xi',s)\,ds + \int\limits_{x_n}^{+\infty} J_+(\tau,\xi',x_n-s)\tilde f(\tau,\xi',s)\,ds, \tag{9}$$

здесь

$$J_-(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{e^{x_n\lambda}}{L(\tau,i\xi',\lambda)}\,d\lambda, \quad J_+(\tau,\xi',x_n) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{e^{x_n\lambda}}{L(\tau,i\xi',\lambda)}\,d\lambda,$$

Γ_- — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни $\lambda_1^-(\tau,\xi')$ и $\lambda_2^-(\tau,\xi')$, Γ_+ — контур, охватывающий корни уравнения $\lambda_1^+(\tau,\xi')$ и $\lambda_2^+(\tau,\xi')$. Далее, чтобы не перегружать запись введем обозначение λ_i^+ и λ_i^-, $i=1,2$, вместо $\lambda_i^+(\tau,\xi')$ и $\lambda_i^-(\tau,\xi')$ соответственно. В развернутой форме записи решение задачи (7) имеет вид

$$\begin{aligned} v_0(\tau,\xi',x_n) = &\int\limits_0^{x_n}\frac{e^{-\lambda_1^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_0^{x_n}\frac{e^{-\lambda_2^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds\\ &+\int\limits_{x_n}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_1^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_{x_n}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_2^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds. \end{aligned} \tag{10}$$

Теперь перейдем к $v_1(\tau,\xi',x_n)$. Для её построения необходимо решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (8), перепишем ее в развернутом виде, учитывая вид $v_0(\tau,\xi',x_n)$,

$$\begin{aligned}
&L(\tau,i\xi',D_{x_n})v_1=0,\quad x_n>0,\\
&v_1|_{x_n=0}=-\varphi_1(\tau,\xi')+\varphi_2(\tau,\xi'),\\
&D_{x_n}v_1|_{x_n=0}=-\lambda_1^+\varphi_1(\tau,\xi')+\lambda_2^+\varphi_2(\tau,\xi'),\\
&v_1\in W_2^4(\mathbb{R}_+).
\end{aligned}$$

здесь

$$\varphi_1(\tau,\xi')=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds,\quad \varphi_2(\tau,\xi')=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds.$$

Решение задачи (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
v_1(\tau,\xi',x_n)&=\frac{(\lambda_1^++\lambda_2^+)e^{-\lambda_1^+x_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}\\
&-\frac{2\lambda_2^+e^{-\lambda_1^+x_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}-\frac{2\lambda_1^+e^{-\lambda_2^+x_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}\\
&+\frac{(\lambda_1^++\lambda_2^+)e^{-\lambda_2^+x_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}.
\end{aligned}\qquad(11)$$

Лемма 1. *При* $\tau\in\mathbb{C}_\gamma^+$, $\mathrm{Re}\tau>0$ *и* $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$ *для корней характеристического уравнения* (4) *справедливо*

$$\lambda_j^+=-\lambda_j^-,\quad j=1,2,\quad (\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2=2|\xi'|^2+\tau^2,$$

$$(\lambda_1^+)^2(\lambda_2^+)^2=|\xi'|^4+|\xi'|^2\tau^2+\varepsilon\tau^2.$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение (4). Обозначив $\mu=\lambda^2$, уравнение (4) принимает вид

$$\mu^2-\big(\tau^2+2|\xi'|^2\big)\mu+\big(\varepsilon\tau^2+|\xi'|^2\tau^2+|\xi'|^4\big)=0,$$

корни его можно представить следующим образом

$$\mu_1=|\xi'|^2+\frac{\tau^2}{2}(1+\sqrt{1-z}),\quad \mu_2=|\xi'|^2+\frac{\tau^2}{2}(1-\sqrt{1-z}),\quad z=\frac{4\varepsilon}{\tau^2}.$$

Корни характеристического уравнения (4) имеют вид

$$\lambda_1^+ = \sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_1^- = -\sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_2^+ = \sqrt{\mu_2}, \quad \lambda_2^- = -\sqrt{\mu_2}.$$

При $\mathrm{Re}\tau = \sigma > 0$ будет справедливо асимптотическое разложение

$$\mu_1 = |\xi'|^2 + \tau^2 - \varepsilon + O\left(|z|^2\right) = |\xi'|^2 + \tau^2 + O\left(1\right), \quad |z| \to 0,$$

$$\mu_2 = |\xi'|^2 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} + O\left(|z|^2\right), \ |z| \to 0.$$

$\square$

Лемма 2. *При* $\mathrm{Re}\tau = \sigma > 0$ *имеет место оценка*

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+| \geq \frac{c\sigma}{|\tau|}\left(|\tau|^2 + |\xi'|^2\right), \tag{12}$$

где $c > 0$ *— константа, не зависящая от* τ *и* ξ'.

Доказательство. Оценка на символ псевдогиперболического оператора имеет вид

$$|L(\tau, i\xi', i\xi_n)| \geq \frac{\sigma}{|\tau|}(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)(\varepsilon + \xi_n^2 + |\xi'|^2). \tag{13}$$

С доказательством можно ознакомиться в [4]. С другой стороны оценку на данный символ можно представить в виде

$$|L(\tau, i\xi', i\xi_n)| = |i\xi_n - \lambda_1^+| \cdot |i\xi_n - \lambda_1^-| \cdot |i\xi_n - \lambda_2^+| \cdot |i\xi_n - \lambda_2^-|. \tag{14}$$

Пусть $\xi_n = \mathrm{Im}\lambda_1^+$, тогда

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-|.$$

Поскольку

$$|i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-| \leq |\mathrm{Im}\lambda_1^+| + |\lambda_1^-| \leq 2|\lambda_1^+|$$

и

$$|i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| = |(\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2 + (\lambda_1^+)^2| \leq |\lambda_2^+|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2,$$

тогда

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| \\ &\qquad\qquad \leq 2|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+|\big(|\lambda_2^+|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2\big). \end{aligned} \tag{15}$$

Обратимся к (13) и (14), заменив ξ_n на $\mathrm{Im}\lambda_1^+$, имеем

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| \\ \geq \frac{\sigma}{|\tau|}(\varepsilon + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2)(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2). \quad (16)$$

Из (15) и (16) получаем

$$2|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+|\big(|\lambda_2^+|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2\big) \geq \frac{\sigma}{|\tau|}(\varepsilon + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2)(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2),$$

тем самым приходим к требуемому неравенству (12). □

Лемма 3. *Существует $\gamma_1 > 0$ такое, что при $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma_1$ справедлива оценка*

$$\mathrm{Re}\lambda_1^+ \geq \sigma, \quad \mathrm{Re}\lambda_2^+ \geq \sqrt{|\xi'|^2 + \varepsilon}.$$

С доказательством данного утверждения можно ознакомиться в работе [11].

Лемма 4. *Существует $\gamma_0 > \gamma_1 > 0$ такое, что при $\mathrm{Re}\tau > \gamma_0$ справедливы оценки:*

$$\||\xi'|^k v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \leq c|\tau|^{-1}\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\||\xi'|^k v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \leq c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k = 3, 4,$$

$$\|D^k_{x_n} v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \leq c|\tau|^{-1}\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k = 1, 2,$$

$$\|D^k_{x_n} v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \leq c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k = 3, 4,$$

$$\||\xi'|^2 D^2_{x_n} v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \leq c|\tau|\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|,$$

с константой $c > 0$, которая не зависит от $f(t, x', x_n)$.

Доказательство. Продолжим функцию $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$ нулем при $x_n < 0$, сохранив обозначение для продолженной функции. Используя функцию Хевисайда $\theta(x_n)$, $v_0(\tau, \xi', x_n)$ из формулы (9) можно записать в виде

$$v_0(\tau, \xi', x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(J_-(\tau, \xi', x_n - s)\theta(x_n - s)\tilde{f}(\tau, \xi', s) \\ + J_+(\tau, \xi', x_n - s)\theta(-x_n + s)\tilde{f}(\tau, \xi', s)\Big)\, ds = \int\limits_{\mathbb{R}} G(\tau, \xi', x_n - s)\tilde{f}(\tau, \xi', s)\, ds.$$

С учетом формулы преобразования Фурье свертки получаем

$$\big\|v_0(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\big\| = \left\|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n} G(\tau, \xi', x_n)\, dx_n \hat{f}(\tau, \xi', \xi_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\right\|,$$

здесь $\hat{f}(\tau,\xi',\xi_n)$ — преобразование Фурье функции $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$. Применяя теорему о вычетах и проводя алгебраические преобразования, приходим к

$$
\begin{aligned}
J(\tau,\xi',\xi_n) &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n} G(\tau,\xi',x_n)\,dx_n \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_1^+ x_n - i\xi_n x_n}}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_2^+ x_n - i\xi_n x_n}}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda_1^+ x_n - i\xi_n x_n}}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n - \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda_2^+ x_n - i\xi_n x_n}}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n.
\end{aligned}
$$

Считая интеграл по переменной x_n, имеем

$$
\begin{aligned}
J(\tau,\xi',\xi_n) &= \frac{1}{\lambda_1+i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} - \frac{1}{\lambda_2+i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} \\
&+\frac{1}{\lambda_1-i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} - \frac{1}{\lambda_2-i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} \\
&= \frac{1}{\big((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2\big)\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)} = \frac{1}{L(\tau,i\xi',i\xi_n)}.
\end{aligned}
$$

В силу оценки на символ псевдогиперболического оператора (13) получаем

$$
\frac{|\xi'|^k+|\xi_n|^k}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|} \le \frac{c^*}{\sigma}|\tau|^{-1}, \quad k=0,1,2,
$$

$$
\frac{|\xi'|^3+|\xi_n|^3}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|} \le \frac{c^*}{\sigma}, \quad \frac{|\xi'|^4+|\xi_n|^4}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|} \le \frac{c^*}{\sigma}|\tau|, \quad \frac{|\xi'|^2|\xi_n|^2}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|} \le \frac{c^*}{\sigma}|\tau|.
$$

Из этих неравенств получаем необходимые оценки. □

Лемма 5. *Пусть существует $\gamma_0 > \gamma_1 > 0$, для любой $f(t,x)$ из $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ такой, что $f(t,x)|_{t=0} = D_t f(t,x)|_{t=0} = 0$, справедливы оценки:*

$$
\||\xi'|^k v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \le c\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k=0,1,2
$$

$$
\||\xi'|^k v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \le c\||\xi'|^{k-2}\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k=3,4.
$$

$$
\||\xi'|^k D^2_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\| \le c\||\xi'|^k\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k=0,1,2
$$

$$
\|D^4_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^n_+)\|
$$

$$\leq c|\tau|^2\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}^n_+)\| + c\||\xi'|^2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}^n_+)\|.$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$.

Доказательство. Для краткости решение задачи (8) запишем следующим образом

$$v_1(\tau,\xi',x_n) = e^{-\lambda_1^+ x_n}\alpha_1(\tau,\xi')e^{-\lambda_1^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds+$$

$$\alpha_2(\tau,\xi')e^{-\lambda_1^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds + \beta_1(\tau,\xi')e^{-\lambda_2^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')e^{-\lambda_2^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds,$$

где

$$\alpha_1(\tau,\xi') = -\frac{1}{2\lambda_1^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)^2},\quad \alpha_2(\tau,\xi') = -\frac{1}{\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},$$

$$\beta_1(\tau,\xi') = -\frac{1}{\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},\quad \beta_2(\tau,\xi') = -\frac{1}{2\lambda_2^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)^2}.$$

Далее перепишем решение иным способом

$$-\int\limits_{-\infty}^{0} D_{z_n}\Bigg(e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]$$

$$+e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\theta(z_n)\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]\Bigg)dz_n.$$

Осуществляя операцию дифференцирования и используя функцию Хевисайда $\theta(z_n)$, приходим к следующему результату:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda_1^+e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\lambda_1^+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\lambda_2^+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda_2^+e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\lambda_1^+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\lambda_2^+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n.$$

Учитывая следующие равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(z_n+x_n)h(z_n)dz_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(x_n-\tilde{z}_n)h(-\tilde{z}_n)d\tilde{z}_n,\quad h(-\tilde{z}_n)=h_1(\tilde{z}_n)$$

$$F(k*h_1)(\xi_n)=\sqrt{2\pi}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n),\quad (k*h_1)(x_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_n\xi_n}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n)d\xi_n,$$

таким образом, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(z_n+x_n)h(z_n)dz_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_n\xi_n}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n)d\xi_n.$$

Основываясь на проведенных выше рассуждениях и осуществляя соответствующую перегруппировку слагаемых, а именно собирая члены, содержащие интегралы $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$ по отдельности, приходим к эквавалентной форме записи решения $v_1(\tau,\xi',x_n)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\left[\frac{2\lambda_1^+\alpha_1(\tau,\xi')}{(\lambda_1^+)^2+\xi_n^2}+\frac{\lambda_1^++\lambda_2^+}{\lambda_1^+-i\xi_n}\cdot\frac{\beta_1(\tau,\xi')}{\lambda_2^++i\xi_n}\right]d\xi_n$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\left[\frac{2\lambda_2^+\beta_2(\tau,\xi')}{(\lambda_2^+)^2+\xi_n^2}+\frac{\lambda_1^++\lambda_2^+}{\lambda_1^++i\xi_n}\cdot\frac{\alpha_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\right]d\xi_n$$

Рассмотрим первую строку полученного выражения. Обозначим выражение в квадратных скобках $B_1(\tau,\xi')$. Проведем необходимые преобразования, в результате получим

$$B_1(\tau,\xi')=\frac{1}{\big((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^++i\xi_n)}.$$

Обозначим через $B_2(\tau,\xi')$ выражение в квадратных скобках во второй строке. Проделаем аналогичные действия, получим

$$B_2(\tau,\xi')=-\frac{1}{\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_1^++i\xi_n)}.$$

Оценим полученное выражение в норме $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для этого воспользуемся неравенством Минковского и равенством Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned}&\big\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}^n)\big\|^2\\ &\quad\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{\big((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^++i\xi_n)}\right|^2 d\xi'd\xi_n\\ &\qquad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_1^++i\xi_n)}\right|^2 d\xi'd\xi_n.\end{aligned}$$

С учетом леммы 2, имеем следующую оценку

$$
\begin{aligned}
&\left\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}^n)\right\|^2\\
&\quad\le c_1\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{|\tau|\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+ s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^++i\xi_n)}\right|^2 d\xi' d\xi_n\\
&\qquad+c_2\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+ s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+}\right|^2 d\xi' d\xi_n
\end{aligned}
$$

Теперь исключим зависимость от переменной ξ_n и применим неравенство Гёльдера, получаем

$$
\begin{aligned}
&\left\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}^n_+)\right\|^2\\
&\quad\le c_1\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{|\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}}\right|^2 d\xi' dx_n\\
&\qquad+c_2\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}\sqrt[4]{(\varepsilon+|\xi'|^2)^3}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+}\right|^2 d\xi' dx_n,
\end{aligned}
$$

Перейдем к анализу каждого интегрального слагаемого, уделяя особое внимание рациональным выражениям. Для первого применив оценку из леммы 2, имеем

$$
\left|\frac{|\tau|}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}}\right|
$$

$$
=\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^++\lambda_2^+)\lambda_1^+}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}\sqrt{\lambda_1^+}\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+}}\right|
$$

$$
\le\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2|\tau|^{7/4}}{\sigma^{7/4}|\tau|^2\sqrt{(\varepsilon+|\xi'|)}(|\tau|+|\xi'|)^{7/2}}\right|\le\left|\frac{1}{\sigma^2\sqrt{(\varepsilon+|\xi'|)}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}}\right|.
$$

Обратимся ко второму интегральному слагаемому, применяя оценку из леммы 2, имеем

$$
\left|\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}\sqrt[4]{(\varepsilon+|\xi'|^2)^3}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+}\right|
$$

$$= \left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\lambda_1^+}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}\sqrt[4]{(\varepsilon+|\xi'|^2)^3}((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+} \right|$$
$$\leq \left| \frac{c(|\tau|+|\xi'|)^2|\tau|}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|^2(|\tau|^2+|\xi'|^2)} \right| \leq \left| \frac{c^*}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|} \right|.$$

Следовательно, получаем

$$\frac{|\xi'|^k}{\sigma^2\sqrt{(\varepsilon+|\xi'|)}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}} \leq \frac{c}{\sigma^2}, \quad \frac{|\xi'|^k}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|} \leq \frac{c}{\sigma^2}|\tau|^{-1}, \quad k=0,1,2,$$
$$\frac{|\xi'|^k}{\sigma^2\sqrt{(\varepsilon+|\xi'|)}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}} \leq \frac{c}{\sigma^2}|\xi'|^{k-2},$$
$$\frac{|\xi'|^k}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|} \leq \frac{c}{\sigma^2}|\tau|^{-1}|\xi'|^{k-2}, \quad k=3,4.$$

Таким образом, на основании проведенного анализа, можно заключить, что первые две оценки, сформулированные в утверждении леммы, являются справедливыми.

Для оценивания производных $D^k_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n)$, требуется осуществить дифференцирование функции $v_1(\tau,\xi',x_n)$ из (11), после этого применить ряд преобразований, аналогичных тем, что были подробно описаны выше. Далее последовательно использовав неравенство Минковского, равенство Парсеваля и неравенство Гёльдера получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\left\| D^k_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|^2 \\ &\leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left| \frac{(-\lambda_2^+)^k\lambda_1^+ - (-\lambda_1^+)^k\lambda_2^+ + i\xi_n((-\lambda_2^+)^k-(-\lambda_1^+)^k)}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^++i\xi_n)} \tilde{f}(\tau,\xi',x_n) \right|^2 ds \\ &+ c_2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left| \frac{(-\lambda_2^+)^k\lambda_1^+ - (-\lambda_1^+)^k\lambda_2^+ + i\xi_n((-\lambda_2^+)^k-(-\lambda_1^+)^k)}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)^2((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_1^++i\xi_n)} \tilde{f}(\tau,\xi',x_n) \right|^2 ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим выражение (17) при $k=2$, тогда

$$\begin{aligned} &\left\| D^2_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|^2 \\ &\leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{[\lambda_1^+\lambda_2^+ + i\xi_n(\lambda_1^++\lambda_2^+)]\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^++i\xi_n)} \right|^2 dx_n d\xi' d\xi_n \\ &\quad + c_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{[\lambda_1^+\lambda_2^+ + i\xi_n(\lambda_1^++\lambda_2^+)]\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_1^++i\xi_n)} \right|^2 dx_n d\xi' d\xi_n. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\lambda_1^+\lambda_2^+ + i\xi_n(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) = (\lambda_2^+ + i\xi_n)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - [\lambda_2^+]^2,$$

неравенство Минковского и лемму 2, проинтегрируем по переменной ξ_n, что приводит к следующей записи:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)|\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt[4]{(|\tau|^2+|\xi'|^2)^3}} \right|^2 dx_n d\xi'$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{(\lambda_2^+)^2|\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(|\tau|^2+|\xi'|^2)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}} \right|^2 dx_n d\xi'.$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left[\left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt{\varepsilon+|\xi'|^2}\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right|^2 + \left| \frac{(\lambda_2^+)^2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\varepsilon+|\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right|^2 \right] dx_n d\xi'.$$

На основании леммы 1 и 2, оценим получившиеся коэффициенты при $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$, тогда

$$\left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)|\tau|}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt[4]{(|\tau|^2+|\xi'|^2)^3}} \right|$$

$$= \left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2|\tau|(\lambda_1^+)^{1/2}}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+}((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)\sqrt[4]{(|\tau|^2+|\xi'|^2)^3}} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\tau|^{3/2}}{\sigma^{3/2}\sqrt{|\tau|^2+|\xi'|^2}|\tau|^2\sqrt[4]{(|\tau|^2+|\xi'|^2)^3}} \right| \leq \frac{c_{21}}{\sigma^2},$$

так для второго интегрального слагаемого имеем

$$\left| \frac{(\lambda_2^+)^2|\tau|}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(|\tau|^2+|\xi'|^2)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|^{3/2}}{\sigma^{3/2}\sqrt{|\tau|^2+|\xi'|^2}|\tau|^2(|\tau|^2+|\xi'|^2)\sqrt[4]{\varepsilon+|\xi'|^2}} \right| \leq \frac{c_{22}}{\sigma^2}.$$

Остаётся лишь третье интегральное слагаемое:

$$\left| \frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt{\varepsilon+|\xi'|^2}\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right| + \left| \frac{(\lambda_2^+)^2}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\varepsilon+|\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right|$$

$$= \left| \frac{\lambda_1^+(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2}{((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)\sqrt{\varepsilon + |\xi'|^2}\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+} \right| + \left| \frac{\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+ + \lambda_1^+)}{((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)(\varepsilon + |\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+} \right|$$

$$\leq c_{23} \left| \frac{(|\tau| + |\xi'|)^3|\tau|}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)|\tau|^2\sqrt{\varepsilon + |\xi'|^2}} \right| + c_{24} \left| \frac{(|\tau| + |\xi'|)^2(\varepsilon + |\xi'|^2)|\tau|}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)|\tau|^2(\varepsilon + |\xi'|^2)} \right| \leq \frac{c^*}{\sigma}.$$

Используя полученные оценки, приходим к выводу о справедливости третьего неравенства, сформулированного в утверждении данной леммы.

Наконец, остается рассмотреть формулу (17) при $k = 4$, а именно

$$\left\| D_{x_n}^4 v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\|^2$$
$$\leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n) - (\lambda_2^+)^4}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_2^+ + i\xi_n)} \tilde{f}(\tau, \xi', x_n) \right|^2 dp$$
$$+ c_2 \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n) - (\lambda_2^+)^4}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ + i\xi_n)} \tilde{f}(\tau, \xi', x_n) \right|^2 dp.$$

Проведем аналогичные рассуждения, что и для оценки $D_{x_n}^2 v_1(\tau, \xi', x_n)$, в этом случае получаем

$$\left| \frac{((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)|\tau|}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt[4]{(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^3}} \right|$$
$$+ \left| \frac{(\lambda_2^+)^4|\tau|}{\sigma\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(|\tau|^2 + |\xi'|^2)\sqrt[4]{\varepsilon + |\xi'|^2}} \right| \leq \frac{c_{41}}{\sigma}\left(|\tau|^2 + |\xi'|^2\right),$$

$$\left| \frac{((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\sqrt{\varepsilon + |\xi'|^2}\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right| + \left| \frac{(\lambda_2^+)^4}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\varepsilon + |\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right| \leq \frac{c_{42}}{\sigma}\left(|\tau|^2 + |\xi'|^2\right),$$

следовательно, используя полученные оценки, приходим к требуемому результату для нормы $\left\| D_{x_n}^4 v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}_+^n) \right\|$. □

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию $v(\tau, \xi', x_n)$ из (6). Из определения функций $v_0(\tau, \xi', x_n)$, $v_1(\tau, \xi', x_n)$, функция $v(\tau, \xi', x_n)$ является аналитической при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$. Обозначим ее обратное преобразование Лапласа — Фурье по (τ, x') через $u(t, x', x_n)$. Следовательно, в силу Лемм 4 и 5, а так же обобщенной теоремы Пэли — Винера $u(t, x', x_n) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$, при этом существуют обобщенные производные $D_t^2 D_{x_j}^2 u(t, x)$, $j = 1, \ldots, n$, в $\mathbb{R}_{++}^{n+1}$, $D_t^2 D_{x_j}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$ при $\gamma > \gamma_0$, и выполняется оценка

$$\left\| u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1}) \right\| + \sum_{j=1}^{n} \left\| D_t^2 D_{x_j}^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1}) \right\|$$

$$\leq c\big\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\big\|,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $f(t, x', x_n)$. Из (6)–(9) следует, что $u(t, x', x_n)$ является решением краевой задачи (2). Следовательно, существование решения доказано. Единственность доказывается аналогично, как и в работе [11].

□

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко за внимание и ценные советы.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т.1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы (ред. Демиденко Г. В., Васкевич В. Л.). Новосибирск: изд-во ин-та Математики, филиал "Гео" изд-ва СО РАН, 2003.

2. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. Москва–Ленинград : Стройиздат, 1940.

3. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров : ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2014.

4. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск : Научная книга, 1998.

5. *Fedotov I., Volevich L. V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // *Russ. J. Math. Phys.* 2006. V. 13, N. 3. P. 278–292.

6. *Fedotov I., Shatalov M., Marais J.* Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // *Acta Mech.* 2016. V. 227, N. 11. P. 3315–3324.

7. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // *Сиб. матем. журн.* 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

8. *Умаров Х. Г.* Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // *Сиб. матем. журн.* 2022. Т. 63, № 3. С. 672–689.

9. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В.* Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // *Матем. тр.* 2021. Т. 24, № 2. С. 3–23.

10. *Bondar L. N., Nurmakhmatov V.* On solvability of the boundary value problem for one pseudohyperbolic equation // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2021. V. 18, N. 2 P. 1046–1057.

11. *Шеметова В.В.* Об одной краевой задаче для псевдогиперболического уравнения // *Матем. тр.* 2023. Т. 26, № 1. С. 192–207.

12. *Шеметова В.В.* Начально-краевая задача для одного псевдогиперболического уравнения с ненулевыми граничными условиями // *Математика и теоретические компьютерные науки.* 2024. Т. 2, № 2. С. 107–121.

13. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М : Наука, 1975.

14. *Демиденко Г. В.* Пространства Соболева и обобщенные решения. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015.

References

1. *Sobolev S.L. Selected works, vol. I: Equations of mathematical physics, computational mathematics, and cubature formulas (eds G. V. Demidenko and V.L. Vaskevich).* Springer, New York, 2006.

2. *Vlasov V.Z. Thin-Walled Elastic Beams.* National Science Foundation, Washington, D.C., 1961

3. *Gerasimov S.I., Erofeev V.I.* Problems of Wave Dynamics of Structural Elements. RFNC-VNIIEF, Sarov, 2014.

4. *Demidenko G.V., Uspenskii S.V.* Partial Differential Equations and Systems not Solvable With Respect to the Highest-Order Derivative. Marcel Dekker Inc., New York, 2003 [in English].

5. *Fedotov I., Volevich L. V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative. *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, V. 13, N. 3, P. 278–292.

6. *Fedotov I., Shatalov M., Marais J.* Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration. *Acta Mech.*, 2016, V. 227, N. 11, P. 3315–3324.

7. *Demidenko G.V.* Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Sib. Math. J.*, 2015, V. 56, N. 6, P. 1028–1041.

8. *Umarov K.G.* Blow-up and global solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic equation related to the generalized Boussinesq equation. *Sib. Math. J.*, 2022, V. 63, N. 3, P. 559–574.

9. *Bondar L.N., Demidenko G.V.* Boundary value problems for one pseudohyperbolic equation in a quarter-plane. *Sib. Math. J.*, 2022, V. 32, N. 1, P. 13–28.

10. *Bondar L. N., Nurmakhmatov V.* On solvability of the boundary value problem for one pseudohyperbolic equation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, V. 18, N. 2, P. 1046–1057

11. *Shemetova V.V.* On a boundary value problem for a pseudohyperbolic equation. // *Sib. Math. J.*, 2023, V. 33, N. 3, P. 242–252.

12. *Shemetova V.V.* An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation with nonzero boundary conditions. // *Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2024, V. 2, N. 2, P. 107–121.

13. *Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. Integral Representations of Functions and Embedding Theorems, vol. I, II.* John Wiley & Sons, New York-Toronto-London, 1978, 1979.

14. *Demidenko G.V.* Sobolev Spaces and Generalized Solutions. Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2015

Информация об авторе

Валентина Владимировна Шеметова, аспирант
SPIN 6273-3910 AuthorID: 990862
Scopus Author ID 57205435553

Author Information

Valentina V. Shemetova, graduate student
SPIN 6273-3910 AuthorID: 990862
Scopus Author ID 57205435553

Статья поступила в редакцию 16.04.2025;

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 102-123
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 102-123

одобрена после рецензирования 01.06.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 16.04.2025;
approved after reviewing 01.06.2025; accepted for publication 11.06.2025