Научная статья
УДК 517.929:57
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-134-150

УСТОЙЧИВОСТЬ И ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Николай Викторович Перцев

Институт математики Сибирского отделения Российской Академии Наук им. С. Л. Соболева, Омск, Россия

homlab@ya.ru, pertsevnv@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5674-7096

Аннотация

Исследованы условия устойчивости тривиального положения равновесия линейного неавтономного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием, возникающего при моделировании динамики популяций. Изучаемое уравнение дополняется вспомогательным уравнением, отражающим динамику численности индивидуумов популяции, находящихся в промежуточной стадии развития. Для анализа устойчивости тривиального положения равновесия основного уравнения использован функционал Ляпунова-Красовского и метод интегральных неравенств. Построены верхняя и нижняя экспоненциальные оценки решений задачи Коши для основного и вспомогательного уравнений изучаемой системы.

Ключевые слова и фразы

линейное неавтономное дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием, устойчивость, функционал Ляпунова-Красовского, экспоненциальные оценки решений задачи Коши.

Источник финансирования

Статья подготовлена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF–2022–0003.

Для цитирования

Перцев Н. В. Устойчивость и двусторонние оценки решений линейного неавтономного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 134-150. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-134-150

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 134-150
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 134-150

STABILITY AND TWO-SIDED ESTIMATES OF SOLUTIONS OF A LINEAR NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH VARIABLE DELAY

Nickolay V. Pertsev

Sobolev Institute of Mathematics SB of RAS, Omsk, Russia

homlab@ya.ru, pertsevnv@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5674-7096

Abstract

The stability conditions of the trivial equilibrium position for a linear nonautonomous differential equation with variable delay arising in the simulation of population dynamics are investigated. The equation under study is supplemented by an auxiliary equation reflecting the dynamics of the number of individuals in the population at an intermediate stage of development. To analyze the stability of the trivial equilibrium position of the basic equation, the Lyapunov-Krasovsky functional and the method of integral inequalities are used. Upper and lower exponential estimates of solutions to the Cauchy problem for the main and auxiliary equations of the system under study are constructed.

Keywords

linear non-autonomous differential equation with variable delay, stability, Lyapunov-Krasovsky functional, exponential estimates of solutions to the Cauchy problem.

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment to Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS, project FWNF-2022-0003

For citation

Pertsev N. V. Stability and two-sided estimates of solutions of a linear nonautonomous differential equation with variable delay // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 134-150. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-134-150

§ 1. Введение и постановка задачи

Дифференциальные уравнения с запаздыванием активно применяются для построения математических моделей динамики популяций. Примеры использования указанного семейства уравнений можно найти в задачах биологии, экологии, иммунологии и эпидемиологии.

В настоящей работе рассматривается пара неавтономных дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием, первое из которых является основным и определяет динамику всей популяции в целом. Второе уравнение является вспомогательным и описывает динамику группы индивидуумов, находящихся в промежуточной стадии развития. Уравнения дополняются начальными данными, содержащими неотрицательную непрерывную функцию и интеграл от нее по промежутку, учитывающему начальное запаздывание. Приведенные в работе дифференциальные уравнения и начальные данные могут возникать при изучении популяций, развивающихся в нестационарных условиях внешней среды.

В задачи работы входит: 1) нахождение достаточных условий асимптотической и экспоненциальной устойчивости тривиального положения равновесия системы, состоящей из основного и вспомогательного уравнений, 2) получение достаточных условий неустойчивости указанного положения равновесия, 3) построение экспоненциальных оценок решений задачи Коши для этих уравнений при заданных начальных данных.

§ 2. Изучаемые уравнения

Пусть $\mu > 0$, $\lambda > 0$ – константы, $\eta(t) \geq 1$ – непрерывная, ограниченная функция, $t \in [0, \infty)$, $h(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\gamma(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющие условиям

$$t - \omega_1 \leq h(t) \leq t - \omega_2, d_L \leq \dot{h}(t) = \frac{dh(t)}{dt} \leq d_U, t \in (-t_h, \infty),$$

$$\gamma_1 \leq \gamma(t) \leq \gamma_2, t \in (-\omega_1, \infty), \tag{2.1}$$

где $t_h > 0$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$, $0 < d_L \leq 1$, $d_U \geq d_L$, $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ – некоторые константы.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = \eta(t)e^{-\lambda(t-h(t))}\gamma(h(t))x(h(t))\dot{h}(t) - (\mu + \gamma(t))x(t), t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$x(s) = x_0(s), s \in [h(0), 0], \tag{2.3}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 134-150
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 134-150

где начальная функция $x_0(s)$ неотрицательна и непрерывна. Уравнение (2.2) с начальным условием (2.3) изучается совместно с дополнительным интегральным уравнением

$$y(t) = \int_{h(t)}^{t} e^{-\lambda(t-a)}\gamma(a)x(a)da, t \geq 0, \tag{2.4}$$

или задачей Коши

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma(t)x(t) - \lambda y(t) - e^{-\lambda(t-h(t))}\gamma(h(t))x(h(t))\dot{h}(t), t \geq 0, \tag{2.5}$$

$$y(0) = \int_{h(0)}^{0} e^{\lambda s}\gamma(s)x_0(s)ds. \tag{2.6}$$

Под производными переменных $x(t)$, $y(t)$ при $t = 0$ понимаются правосторонние производные.

Приведем интерпретацию переменных и параметров, используемых в (2.1)–(2.6). Переменные $x(t)$, $y(t)$ описывают численность некоторой популяции, причем $x(t)$ отражает динамику основной (первой) группы индивидуумов, тогда как $y(t)$ – динамику группы индивидуумов, которые могут производить потомство (вторая группа). Константы μ, λ означают интенсивности гибели индивидуумов первой и второй группы, функция $\gamma(t)$ – интенсивность перехода индивидуумов из первой группы во вторую.

Функция $h(t)$ задает момент начала перехода индивидуумов первой группы во вторую, при условии, что они завершили пребывание в этой группе и вернулись обратно в первую группу в момент времени t. Выражение $\omega(t) = t - h(t)$ интерпретируется как длительность пребывания индивидуумов во второй группе, и, как следует из (2.1), эта длительность ограничена сверху и снизу соответственно константами ω_1, ω_2. Ограничение на $\dot{h}(t)$, указанное в (2.1), означает, что $h(t)$ монотонно возрастает, а скорость ее роста может локально меняться от малых до относительно больших значений в пределах промежутка $[d_L, d_U]$, однако, если для некоторого t_* верно $h(t_*) = t_* - \omega_2$, то $\dot{h}(t_*) \leq 1$.

Множитель $\exp(-\lambda(t - h(t))) = \exp(-\lambda\omega(t))$ означает долю индивидуумов первой группы, которые поступили во вторую группу в момент времени $h(t)$, и не погибли, находясь во второй группе в течение промежутка времени $(h(t), h(t) + \omega(t)) = (h(t), t)$ длительностью $\omega(t)$. Функция $\eta(t)$ задает численность произведенного потомства в расчете на одного индивидуума второй группы в случае $\eta(t) > 1$. Равенство $\eta(t) = 1$ означает, что индивидуум второй группы, возвращающийся в первую группу, не производит потомства.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 134-150
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 134-150

Начальный момент времени $t = 0$ выбран с точки зрения исследования динамики изучаемых популяций при $t > 0$, «стартующих» из начального состояния, заданного (2.3), (2.6).

Решением задачи Коши (2.2), (2.3) на промежутке $t \in [0, \infty)$ назовем непрерывную на промежутке $[h(0), \infty)$ функцию $x(t)$, непрерывно-дифференцируемую на промежутке $[0, \infty)$, удовлетворяющую начальному условию (2.3) и уравнению (2.2) для всех $t \in [0, \infty)$ (с учетом правосторонней производной при $t = 0$).

Задачу Коши (2.2), (2.3) можно рассматривать как пример математической модели живых систем в форме стадия-зависимой модели динамики популяций, исследованной в [1]. Учитывая линейность и структуру уравнения (2.2), положительность констант, свойства $\eta(t)$, $\gamma(t)$, $h(t)$, $x_0(t)$, входящих в (2.2), (2.3), устанавливаем, что задача Коши (2.2), (2.3) имеет единственное решение, и это решение является неотрицательным. Данное утверждение является непосредственным следствием предположения (H3), леммы 5 и теоремы 1 из [1]. Обращаясь к (2.4), устанавливаем, что переменная $y(t)$ определена, непрерывна и неотрицательна на промежутке $[0, \infty)$. Рассматривая (2.4) при $t = 0$ и дифференцируя (2.4) при $t > 0$, непосредственно получаем, что $y(t)$ является решением задачи Коши (2.5), (2.6) на промежутке $[0, \infty)$ (с учетом правосторонней производной при $t = 0$). Интегрируя (2.5) по формуле вариации постоянной и выполняя промежуточные выкладки с учетом начальных данных (2.6), приходим от (2.5), (2.6) к уравнению (2.4). В итоге убеждаемся в эквивалентности интегрального уравнения (2.4) и задачи Коши (2.5), (2.6).

В следующих разделах приведены достаточные условия устойчивости (неустойчивости) тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2), которое возникает как решение задачи Коши (2.2), (2.3) при $x_0(s) \equiv 0$. Опираясь на (2.2), (2.3), также будем изучать (2.5), (2.6), для которых $y(t) \equiv 0$ – тривиальное положение равновесия (2.5), если в (2.6) $y(0) = 0$, и $x(t) \equiv 0$. Одновременно с нахождением условий устойчивости (неустойчивости) тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы уравнений (2.2), (2.5) построим в явной форме нижние и верхние оценки решений $x(t)$, $y(t)$ задачи Коши (2.2), (2.3), (2.5), (2.6).

Опираясь на [2] (гл. 2, с. 91), особо отметим, что для уравнений (2.2), (2.5) начальные возмущения по отношению к тривиальному положению равновесия рассматриваются в форме соотношений (2.3), (2.6), содержащих только неотрицательные и непрерывные начальные функции.

§ 3. Достаточные условия устойчивости и оценки решений

3.1. Приведем предварительно один из известных подходов к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ неавтономного линейного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t - r(t)), \qquad (3.1)$$

рассмотренного в монографии [3] (гл. 5, с. 136, 137). В уравнении (3.1) $a(t)$, $b(t)$ – ограниченные непрерывные функции, $t \in (-\infty, \infty)$, причем для всех t верно $a(t) \geq \delta > 0$. Кроме того, $r(t)$ – непрерывно диффренцируема, ограничена и $1 - \dot{r}(t) > 0$. Для нахождения условий асимптотической устойчивости $x(t) \equiv 0$ уравнения (3.1) в [3] использован функционал Ляпунова-Красовского

$$V(t, x_t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \alpha \int_{t-r(t)}^{t} x^2(a)da, \qquad (3.2)$$

где $\alpha > 0$ – некоторая константа. Производная функционала (3.2) в силу уравнения (3.1) имеет следующий вид:

$$\frac{dV(t, x_t)}{dt} = -[(a(t)-\alpha)x^2(t)+b(t)x(t)x(t-r(t))+\alpha(1-\dot{r}(t))x^2(t-r(t))]. \qquad (3.3)$$

Принимая, что в (3.3) выражение в квадратных скобках образует положительно определенную квадратичную форму, и полагая $\alpha = \delta/2$, получено следующее утверждение. Пусть неравенство

$$(2a(t) - \delta)\delta(1 - \dot{r}(t)) > b^2(t) \qquad (3.4)$$

выполняется равномерно по t. Тогда тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (3.1) равномерно асимптотически устойчиво. Определение равномерной асимптотической устойчивости приведено в [3] (гл. 5, с. 130), а сам термин понимается по отношению к начальным данным, т.е. по отношению к паре (σ, φ), где σ – начальный момент времени, φ – начальная функция, которым соответствует решение задачи Коши $x = x(\sigma, \varphi)(t)$ для уравнения (3.1) при $t \geq \sigma$.

Применим указанный подход к уравнению (2.2), учитывая, что (2.2) изучается на полуоси $t \in [0, \infty)$. Заменим $t - r(t)$ на функцию $h(t)$ и положим $a(t) = \mu + \gamma(t)$, $b(t) = -g(t)\dot{h}(t)$, где

$$g(t) = \eta(t)e^{-\lambda(t-h(t))}\gamma(h(t)). \qquad (3.5)$$

Используя указанную замену и обозначения, из (3.2), (3.3) по аналогии с (3.4) получаем, что тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) равномерно асимптотически устойчиво, если неравенство

$$(2\gamma(t) + \mu - \gamma_1)(\mu + \gamma_1) > \dot{h}(t)g^2(t) \qquad (3.6)$$

выполняется равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Неравенство (3.6) с учетом равномерного выполнения по $t \in [0, \infty)$ является достаточным. Следовательно, возможны и другие достаточные условия, обеспечивающие равномерную устойчивость или асимптотическую устойчивость (при фиксированном $t = \sigma = 0$), возникающие при выборе функционала Ляпунова-Красовского, отличного от (3.2), и использовании ряда известных теорем (см., в частности, теоремы, приведенные в гл. 2 монографии [2]). В качестве примера выберем функционал

$$V(t, x_t) = x^2(t) + (\mu + \gamma_1) \int_{h(t)}^{t} x^2(a) da, \tag{3.7}$$

содержащий константу γ_1 – нижнюю оценку функции $\gamma(t)$. Производная функционала (3.7) в силу уравнения (2.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, x_t)}{dt} &= -2(\mu + \gamma(t))x^2(t) + 2g(t)\dot{h}(t)x(t)x(h(t)) \\ &+ (\mu + \gamma_1)x^2(t) - (\mu + \gamma_1)x^2(h(t))\dot{h}(t) \\ &\leq -(\mu + \gamma_1)(x^2(t) + x^2(h(t))\dot{h}(t)) + g(t)(\dot{h}(t))^{1/2}(x^2(t) + x^2(h(t))\dot{h}(t)) \\ &\leq -[(\mu + \gamma_1) - \sup_{t \in [0,\infty)} \{g(t)(\dot{h}(t))^{1/2}\}](x^2(t) + x^2(h(t))\dot{h}(t)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Опираясь на (3.8), примем, что

$$\mu + \gamma_1 > \sup_{t \in [0,\infty)} \{g(t)(\dot{h}(t))^{1/2}\}. \tag{3.9}$$

Используя теорему 5.5 и примеры 5.2–5.4 из [2] (гл. 2, с. 142–147), получаем, что при выполнении (3.9) тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) асимптотически устойчиво с учетом выбора указанной выше начальной функции.

Возвращаясь к (3.6), используем нижнюю оценку функции $\gamma(t)$ и заменим $2\gamma(t) + \mu - \gamma_1$ на $2\gamma_1 + \mu - \gamma_1 = \mu + \gamma_1$. Учитывая, что $\mu + \gamma_1 > 0$, $\dot{h}(t) > 0$, $g(t) \geq 0$, вместо (3.6) потребуем выполнения неравенства

$$\mu + \gamma_1 > g(t)(\dot{h}(t))^{1/2}$$

равномерно по $t \in [0, \infty)$, что фактически приводит к (3.9).

Следуя определению асимптотической устойчивости и учитывая неотрицательность начальной функции в (2.3), примем, что $0 \leq x(t) \leq x_*$, $t \in [h(0), \infty)$, и $x(t) \to +0$ при $t \to +\infty$. Переходя от (2.5), (2.6) к (2.4), получаем, что

$$0 \leq y(t) \leq \int_{h(t)}^{t} e^{-\lambda(t-a)} \gamma_2 x_* da = y_* = \gamma_2 x_* (1 - e^{-\lambda \omega_1})/\lambda,$$

$$0 \le y(t) \le \gamma_2\omega(t)x(\theta(t)),\ \theta(t) \in (t-\omega(t), t), t \in [0,\infty).$$

Имеем, что для всех $t \in [0,\infty)$ переменная $y(t)$ является неотрицательной и ограниченной сверху константой y_*, линейно зависящей от константы x_*. Поскольку $\omega(t)$ положительная и ограниченная функция, то $\theta(t) \to +\infty$, $x(\theta(t)) \to +0$ и $y(t) \to +0$ при $t \to +\infty$. Приведенные соотношения означают асимптотическую устойчивость тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы (2.2), (2.5) при использовании начальных данных (2.3), (2.6).

Отметим, что непосредственное построение явных оценок для переменных $x(t)$, $y(t)$ с помощью функционала Ляпунова-Красовского (3.7) требует значительных усилий. Вместе с тем, неравенства вида (3.9) будут использованы далее для построения экспоненциальных оценок на переменные $x(t)$, $y(t)$.

3.2. Обратимся к частному случаю, в котором $\eta(t) \equiv 1$. Складывая уравнения (2.2), (2.5) и учитывая неотрицательность $x(t)$, $y(t)$, приходим к соотношениям

$$\frac{d(x(t)+y(t))}{dt} = -\mu x(t) - \lambda y(t) \le -\min\{\mu,\lambda\}(x(t)+y(t)), t \ge 0. \qquad (3.10)$$

Проинтегрируем (3.10), умножив обе части уравнения и неравенства на вспомогательную экспоненту $\exp(\min\{\mu,\lambda\}t)$. Используя начальные условия (2.3), (2.6) и выполняя стандартные выкладки, приходим к оценкам

$$0 \le x(t) + y(t) \le (x_0(0) + y(0))e^{-\min\{\mu,\lambda\}t}, t \ge 0. \qquad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы уравнений (2.2), (2.5) экспоненциально устойчиво при использовании начальных данных (2.3), (2.6), и для решения $x(t)$, $y(t)$ задачи Коши (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) справедлива оценка (3.11). Приведенный результат имеет очевидную интерпретацию: при $\eta(t) \equiv 1$ отсутствует размножение индивидуумов и, как следствие, численность популяции снижается за счет гибели индивидуумов, интенсивность которой входит в показатель экспоненты, приведенной в (3.11).

3.3. Пусть $\eta(t) \not\equiv 1$. Для нахождения условий экспоненциальной устойчивости тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) перейдем от задачи Коши (2.2), (2.3) к эквивалентному интегральному уравнению, дополненному начальным условием, а именно:

$$x(t) = (Lx)(t), t \ge 0, x(s) = x_0(s), s \in [h(0), 0]. \qquad (3.12)$$

Выражение для $(Lx)(t)$ в (3.12) получается путем интегрирования (2.2) по формуле вариации постоянной с учетом начального значения (2.3):

$$(Lx)(t) = e^{-\int_0^t(\mu+\gamma(s))ds}x_0(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t(\mu+\gamma(s))ds}g(a)\dot{h}(a)x(h(a))da,$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 134-150
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 134-150

$$t \geq 0, \tag{3.13}$$

где $g(t)$ указана в (3.5). Примем, что в (3.12) $x^{(0)}(s) \not\equiv 0$. Решением задачи (3.12) на конечном промежутке $[0,\tau]$, $\tau > 0$, назовем непрерывную на промежутке $[h(0),\tau]$ функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую начальному условию и интегральному уравнению в (3.12) для всех $t \in [0,\tau]$. Будем говорить, что задача (3.12) имеет решение на промежутке $[0,\infty)$, если эта задача имеет решение на каждом конечном промежутке $[0,\tau]$.

Применим далее подход, основанный на использовании метода монотонных операторов и интегральных неравенств [4] (гл. 3, с. 329–349), [5] (гл. 1, с. 43–59), [6] (с. 140, 141). Обозначим

$$\rho = \sup_{t\in[0,\infty)} \{g(t)\dot{h}(t)\} > 0, \tag{3.14}$$

и примем, что выполнено неравенство

$$\mu + \gamma_1 > \rho. \tag{3.15}$$

В дополнение к (3.13) введем

$$(\widehat{L}x)(t) = e^{-(\mu+\gamma_1)t}\Big(x_0(0) + \int_0^t e^{(\mu+\gamma_1)a}\rho x(h(a))da\Big), t \geq 0. \tag{3.16}$$

Полагаем, что в (3.16), равно как и в (3.13), под $x = x(t)$ понимается любая функция, определенная и непрерывная на промежутке $[h(0),\infty)$. Отметим важные свойства $(Lx)(t)$, $(\widehat{L}x)(t)$. Пусть функции $x = x(t)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ определенны, непрерывны на промежутке $[h(0),\infty)$ и выполнены неравенства $x_1(t) \leq x_2(t)$, $t \in [h(0),\infty)$. Тогда для всех $t \in [0,\infty)$ имеют место неравенства

$$(Lx)(t) \leq (\widehat{L}x)(t), (Lx_1)(t) \leq (Lx_2)(t), (\widehat{L}x_1)(t) \leq (\widehat{L}x_2)(t).$$

Если $x = x(t)$ неотрицательна, то для всех $t \in [0,\infty)$ верны неравенства $(Lx)(t) \geq 0$, $(\widehat{L}x)(t) \geq 0$.

Следуя [7], построим для решения задачи (3.12) оценки вида

$$0 \leq x(t) \leq u(t) = c_0 e^{-r_0 t}, t \in [0,\infty), c_0 > 0, 0 < r_0 < \mu + \gamma_1. \tag{3.17}$$

На первом этапе функцию $u(t)$ и ее параметры будем искать как решение неравенств

$$0 \leq (Lu)(t) \leq (\widehat{L}u)(t) \leq u(t), t \in [0,\infty). \tag{3.18}$$

Используя представление $t - h(t) = \omega(t)$, ограничения $0 < \omega_2 \le \omega(t) \le \omega_1$ и выполняя промежуточные преобразования, от (3.18) приходим к неравенству

$$x_0(0) + c_0 \frac{e^{(\mu+\gamma_1-r_0)t} - 1}{\mu + \gamma_1 - r_0} \rho e^{r_0\omega_1} \le c_0 e^{(\mu+\gamma_1-r_0)t}, t \in [0, \infty). \tag{3.19}$$

Положим, что $c_0 \ge x_0(0)$ либо $c = c_0 > 0$ – некоторая константа, если $x_0(0) = 0$. Опираясь на (3.15) выберем r_0 как единственный на промежутке $(0, \mu + \gamma_1)$ корень r_* уравнения

$$\mu + \gamma_1 - r_0 = \rho e^{r_0\omega_1}. \tag{3.20}$$

Отметим, что для фиксированных μ, γ_1, ρ, ω_1 корень r_* уравнения (3.20) может быть легко найден с помощью простых численных методов.

Используя указанные $c_0 > 0$, $r_0 = r_*$, получаем, что неравенство (3.19) является верным. В самом деле, (3.19) будет верно при $t = 0$, а при $t > 0$ производные функций, стоящих в левой и правой частях (3.19), совпадают. Как следствие, существует функция $u(t)$, удовлетворяющая (3.18).

На втором этапе сопоставим $u(s)$ и $x_0(s)$. Зафиксируем $r_0 = r_*$ и потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$0 \le x_0(s) \le u(s) = c_0 e^{-r_* s}, s \in [h(0), 0].$$

Учитывая, что $x^{(0)}(s) \not\equiv 0$, выберем искомую константу в виде

$$c_0 = c_* = \sup_{s \in [h(0), 0]} \{e^{r_* s} x_0(s)\}. \tag{3.21}$$

Положим $u_*(t) = c_* \exp(-r_* t)$, $t \in [h(0), \infty)$. Рассмотрим функцию $z(t)$, определенную и непрерывную на промежутке $[h(0), \infty)$, и такую, что

$$z(s) = x^{(0)}(s), s \in [h(0), 0], 0 \le z(t) \le u_*(t), t \in [0, \infty).$$

Тогда справедлива цепочка неравенств:

$$0 \le z(s) \le u_*(s), s \in [h(0), 0],$$

$$0 \le (Lz)(t) \le (Lu_*)(t) \le (\widehat{L}u_*)(t) \le u_*(t), t \in [0, \infty).$$

Функция $z_*(t)$, построенная по правилу

$$z_*(s) = z(s), s \in [h(0), 0], z_*(t) = (Lz)(t), t \in [0, \infty),$$

определена, непрерывна и неотрицательна на промежутке $[h(0), \infty)$. Опираясь на линейность интегрального уравнения и свойства используемых констант и функций, получаем, что задача (3.12) имеет единственное решение $x = x(t)$ на любом фиксированном промежутке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, и справедлива оценка $0 \le x(t) \le u_*(t)$, $t \in [0, \tau]$. Для доказательства этого утверждения достаточно применить леммы 1, 2 из [1]. Учитывая, что построение функции $u_*(t)$ и выбор ее параметров r_*, c_* (см. корень уравнения (3.20) и соотношение (3.21)) не зависят от τ, получаем искомые оценки (3.17) при $c = c_*$, $r = r_*$:

$$0 \le x(t) \le u(t) = c_* e^{-r_* t}, t \in [0, \infty). \tag{3.22}$$

Используя (2.4), (3.22), устанавливаем экспоненциальную оценку для $y(t)$:

$$0 \le y(t) \le \gamma_2 \psi_* c_* e^{-r_* t}, t \in [0, \infty), \tag{3.23}$$

где $\psi_* = \omega_1$, если $r_* = \lambda$, $\psi_* = |1 - e^{-(\lambda - r_*)\omega_1}|/|\lambda - r_*|$, если $r_* \ne \lambda$.

В итоге приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство (3.15). Тогда: 1) тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) является экспоненциально устойчивым при использовании начальных данных (2.3); 2) тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы уравнений (2.2), (2.5) является экспоненциально устойчивым при использовании начальных данных (2.3), (2.6); 3) для решения $x(t)$, $y(t)$ задачи Коши (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) имеют место оценки (3.22), (3.23).*

§ 4. Достаточные условия неустойчивости и оценки решений

Пусть $\eta(t) \not\equiv 1$. Перейдем к нахождению достаточных условий неустойчивости тривиальное положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) и построению экспоненциально растущих оценок для решения задачи Коши (2.2), (2.3). Примем, что в дополнение к неотрицательности начальной функции (2.3) выполнено условие:

$$x_0(s) \ge \widehat{x}_0 > 0, s \in [h(0), 0]. \tag{4.1}$$

По аналогии с (3.7) введем константу

$$\beta = \inf_{t \in [0,\infty)} \{g(t)\dot{h}(t)\} > 0, \tag{4.2}$$

где $g(t)$ указана в (3.5). Положим, что

$$(\widetilde{L}x)(t) = e^{-(\mu+\gamma_2)t}\Big(x_0(0) + \int_0^t e^{(\mu+\gamma_2)a}\beta x(h(a))da\Big), t \ge 0, \tag{4.3}$$

понимая под $x = x(t)$ любую функцию, определенную и непрерывную на промежутке $[h(0), \infty)$.

Построим функцию $w_1(t) = c_1 \exp(r_1 t)$ с параметрами $c_1 > 0$, $r_1 > 0$, удовлетворяющую неравенствам

$$w_1(s) \le x_0(s), s \in [h(0), 0], w_1(t) \le (\widetilde{L}w_1)(t) \le (Lw_1)(t), t \in [0, \infty). \quad (4.4)$$

Рассмотрим неравенство $w_1(t) \le (\widetilde{L}w_1)(t)$, $t \in [0, \infty)$, используя (4.2) и (4.3). Выполняя элементарные преобразования, приходим к неравенству

$$e^{(\mu+\gamma_2+r_1)t} c_1 \le x_0(0) + c_1 \frac{e^{(\mu+\gamma_2+r_1)t} - 1}{\mu + \gamma_2 + r_1} \beta e^{-r_1\omega_1}, t \in [0, \infty). \quad (4.5)$$

Положим $t = 0$ в (4.5) и получим неравенство $c_1 \le x_0(0)$. Используя (4.1), выберем $c_1 \in (0, x_0^*]$. Пусть $t > 0$. Сравнивая производные функций, стоящих в левой и правой частях (4.5), получаем их совпадение при выборе r_1 как единственного на промежутке $r_1 \in (0, \infty)$ корня r_1^* уравнения

$$\mu + \gamma_2 + r_1 = \beta e^{-r_1\omega_1}, \quad (4.6)$$

при условии, что выполнено неравенство

$$\beta > \mu + \gamma_2. \quad (4.7)$$

Зафиксируем $r_1 = r_1^*$ и перейдем к неравенству

$$w_1(s) = c_1 e^{r_1^* s} \le x_0(s), s \in [h(0), 0].$$

Учитывая (4.1), примем, что

$$c_1 = c_1^* = \inf_{s \in [h(0), 0]} x_0(s) > 0. \quad (4.8)$$

Следовательно, $w_1(t) = c_1^* \exp(r_1^* t)$ является решением (4.4).

Построим функцию $w_2(t) = c_2 \exp(r_2 t)$ с параметрами $c_2 > 0$, $r_2 > 0$, удовлетворяющую неравенствам

$$x_0(s) \le w_2(s), s \in [h(0), 0], (Lw_2)(t) \le (\widehat{L}w_2)(t) \le w_2(t), t \in [0, \infty). \quad (4.9)$$

Используя (3.7), рассмотрим неравенство $(\widehat{L}w_2)(t) \le w_2(t)$, $t \in [0, \infty)$. Выполняя элементарные преобразования, приходим к неравенству

$$x_0(0) + c_2 \frac{e^{(\mu+\gamma_1+r_2)t} - 1}{\mu + \gamma_1 + r_2} \rho e^{-r_2\omega_2} \le c_2 e^{(\mu+\gamma_1+r_2)t}, t \in [0, \infty). \quad (4.10)$$

Полагая в (4.10) $t = 0$, получаем, что c_2 следует выбрать как $c_2 \ge x_0(0) > 0$. В случае $t > 0$ сравним производные функций, стоящих в левой и правой частях (4.10). Используя (3.14), (4.2), (4.7) и соотношения

$$0 < \omega_2 < \omega_1, \ e^{-r\omega_2} > e^{-r\omega_1}, r > 0,$$

устанавливаем, что $\rho \geq \beta > \mu + \gamma_2 \geq \mu + \gamma_1$, и уравнение

$$\mu + \gamma_1 + r_2 = \rho e^{-r_2 \omega_2}, \tag{4.11}$$

имеет на промежутке $r_2 \in (0, \infty)$ единственный корень $r_2 = r_2^*$. Более того, корень уравнения (4.11) таков, что $r_2^* \geq r_1^*$, где r_1^* – корень уравнения (4.6). Как следствие, убеждаемся в выполнении (4.10) для всех $t \geq 0$. Обращаясь к неравенству

$$x_0(s) \leq w_2(s) = c_2 e^{r_2^* s}, s \in [h(0), 0],$$

выберем искомую константу в виде

$$c_2 = c_2^* = \sup_{s \in [h(0),0]} \{e^{-r_2^* s} x_0(s)\}. \tag{4.12}$$

Следовательно, $w_2(t) = c_2^* \exp(r_2^* t)$ является решением (4.9).

Используя (4.8), (4.12) и неравенство $0 < r_1^* < r_2^*$, замечаем, что для пары функций $w_1(t) = c_1^* \exp(r_1^* t)$, $w_2(t) = c_2^* \exp(r_2^* t)$ выполнены соотношения $0 \leq w_1(s) \leq x_0(s) \leq w_2(s)$, $s \in [h(0), 0]$, $w_1(t) \leq w_2(t)$, $t \in [0, \infty)$. Введем функцию $z(t)$, определенную и непрерывную на промежутке $[h(0), \infty)$, и такую, что $z(s) = x_0(s)$, $s \in [h(0), 0]$, $w_1(t) \leq z(t) \leq w_2(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда справедливы соотношения:

$$0 \leq w_1(s) \leq z(s) \leq w_2(s), s \in [h(0), 0],$$

$$w_1(t) \leq (\widetilde{L} w_1)(t) \leq (L w_1)(t) \leq (Lz)(t)$$
$$\leq (L w_2)(t) \leq (\widehat{L} w_2)(t) \leq w_2(t), t \in [0, \infty).$$

Функция $z_*(t)$, построенная по правилу

$$z_*(s) = z(s), s \in [h(0), 0], z_*(t) = (Lz)(t), t \in [0, \infty),$$

определена, непрерывна и неотрицательна на промежутке $[h(0), \infty)$. Применим к задаче (3.5) принцип сжимающих отображений в сочетании с методом эквивалентных норм [5] (с. 11–13). Опираясь на линейность интегрального уравнения, и по аналогии со схемой доказательства леммы 2 из [1], получаем, что задача (3.5) имеет единственное решение $x = x(t)$ на любом фиксированном промежутке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, и справедливы оценки $w_1(t) \leq x(t) \leq w_2(t)$, $t \in [0, \tau]$. Учитывая, что построение функций $w_1(t)$, $w_2(t)$ и выбор их параметров не зависят от τ, получаем следующие оценки

$$c_1^* e^{r_1^* t} \leq x(t) \leq c_2^* e^{r_2^* t}, t \in [0, \infty). \tag{4.13}$$

Из (4.13), в частности, следует, что тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) при использовании начальных данных (2.3) является неустойчивым. В самом деле, выбор начальной функции в виде (4.1) в сочетании с (4.7) приводит в (4.13) к левосторонней экспоненциально возрастающей оценке $x(t)$, что противоречит определению устойчивости тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2).

Возвращаясь к переменной $y(t)$, из (2.4) и (4.13) получаем оценки

$$\gamma_1 \psi_1 c_1^* e^{r_1^* t} \le y(t) \le \gamma_2 \psi_2 c_2^* e^{r_2^* t}, t \in [0, \infty), \tag{4.14}$$

где $\psi_1 = \left(1 - e^{-(\lambda + r_1^*)\omega_2}\right)/(\lambda + r_1^*)$, $\psi_2 = \left(1 - e^{-(\lambda + r_2^*)\omega_1}\right)/(\lambda + r_2^*)$.

В итоге приходим к следующему результату.

Теорема 2. *выполнено неравенство (4.7). Тогда: 1) тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) неустойчиво при использовании начальных данных (2.3); 2) тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы уравнений (2.2), (2.5) неустойчиво при использовании начальных данных (2.3), (2.6); 3) для решения $x(t)$, $y(t)$ задачи Коши (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) при выполнении (4.1) имеют место оценки (4.13), (4.14).*

§ 5. Случай автономного уравнения

Рассмотрим частный случай уравнения (2.2), который возникает при постоянных параметрах $\eta \ge 1$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ и постоянном запаздывании $\omega > 0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \eta\, e^{-\lambda\omega} \gamma x(t - \omega) - (\mu + \gamma) x(t), t \ge 0. \tag{5.1}$$

В [2] (гл. 1, с. 61, 62), [3] (гл. 5, с. 135, 136) подробно приведены условия устойчивости тривиального положения равновесия $z(t) \equiv 0$ уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = a z(t - \omega) + b z(t), \tag{5.2}$$

содержащего параметры a, b произвольных знаков, включая и нулевые значения. Учитывая, что в (5.1) $a > 0$, $b < 0$, и опираясь на (5.2), получаем, что тривиальное положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (5.1) является асимптотически устойчивым, если

$$\mu + \gamma > \eta e^{-\lambda\omega} \gamma, \tag{5.3}$$

и не устойчивым, если

$$\eta e^{-\lambda\omega} \gamma > \mu + \gamma. \tag{5.4}$$

Видно, что неравенства (3.15), (4.7) близки по форме к (5.3), (5.4).

Используя результаты разделов 3.3 и 4, нетрудно заметить, что задача Коши (5.1), (2.3) допускает явное решение при специальном выборе начальной функции $x_0(s)$. Пусть выполнено (5.3) и $r = r_1$ – корень уравнения

$$\mu + \gamma - r = \eta\, e^{-\lambda\omega}\gamma e^{r\omega}, r \in (0, \mu + \gamma).$$

Положим, что $x_0(s) = x_* \exp(-r_1 s)$, $s \in [-\omega, 0]$, где $x_* > 0$ – фиксированная константа. Тогда задача Коши (5.1), (2.3) имеет единственное решение $x(t) = x_* \exp(-r_1 t)$, $t \in [0, \infty)$. Пусть выполнено (5.4) и $r = r_2$ – корень уравнения

$$\mu + \gamma + r = \eta\, e^{-\lambda\omega}\gamma e^{-r\omega}, r \in (0, \infty).$$

Примем, что $x_0(s) = x_* \exp(r_2 s)$, $s \in [-\omega, 0]$. Тогда задача Коши (5.1), (2.3) имеет единственное решение $x(t) = x_* \exp(r_2 t)$, $t \in [0, \infty)$. Подставляя найденные $x(t)$ в (2.4), приходим к соотношению

$$y(t) = \int_{t-\omega}^{t} e^{-\lambda(t-a)}\gamma x(a) da = \int_{0}^{\omega} e^{-\lambda s}\gamma x(t-s) ds, t \geq 0,$$

откуда нетрудно получить явное выражение для переменной $y(t)$.

§ 6. Заключение

Результаты раздела 3 показывают, что достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2), полученные с помощью функционала Ляпунова-Красовского и метода монотонных операторов, по своей форме достаточно близки (см. неравенства (3.9) и (3.15) с учетом (3.14)). Вместе с тем, если в (2.1) принять, что $d_U = 1$, то $\dot{h}(t)) \leq (\dot{h}(t))^{1/2}$, и неравенство (3.15) в сочетании с обозначением (3.14) приводит к относительно более слабым ограничениям на $\mu + \gamma_1$ по сравнению с неравенством (3.9).

Полученные в работе оценки (3.22), (3.23), (4.14), (3.15) справедливы не только на промежутке $t \in [0, \infty)$, но и на любом конечном промежутке $t \in [0, T]$, $T > 0$. Если функции $\eta(t)$, $\gamma(t)$, $h(t) = t - \omega(t)$ подвержены существенным изменениям на промежутках $[0, T_1)$, $[T_1, T_2)$, $[T_2, T_3)$ и т.д., то оценки (3.22), (3.23), (4.14), (3.15) можно строить для указанных промежутков, изучая возникающую задачу Коши для уравнения (2.2) и последовательно используя оценки решения $x(t)$ с предыдущих промежутков.

Отметим, что большой интерес представляет исследование поведения решения $x(t)$, $y(t)$ задач Коши (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) для периодических функций $\eta(t)$, $\gamma(t)$, $\omega(t)$, удовлетворяющих указанным в разделе 2 и дополнительным условиям. Использование в уравнениях модели указанных функций $\eta(t)$, $\gamma(t)$, $\omega(t)$ интерпретируется как периодически меняющиеся условия внешней среды, влияющие на производство потомства и динамику популяции в целом. Для изучения устойчивости тривиального положения равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.2) могут быть использованы подходы, приведенные в [8] и цитируемых в этой статье публикациях.

Список литературы

1. *Перцев Н. В.* Глобальная разрешимость и оценки решений задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях живых систем // *Сиб. матем. журн.* 2018. Т. 59, № 1. С. 143–157.

2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* М.: Наука, 1981.

3. *Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1984.

4. *Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.* М.: Мир, 1969.

5. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука, 1969.

6. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // *Сер. Мат. анализ.* / Итоги науки и техники. 1977. Т. 15. С. 131–198.

7. *Перцев Н. В.* Двусторонние оценки на решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием // *Сиб. мат. журн.* 2013. Т. 54, № 6. С. 1368–1379.

8. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *In: Functional Differential Equations and Applications* (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

References

1. *Pertsev N. V.* Global solvability and estimates of solutions to the Cauchy problem for the retarded functional differential equations that are used to model living systems // *Sib. Math. J.* 2018. V. 59, № 1. P. 143–157.

2. *Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. Stability and periodic regimes of controlled systems with aftereffect.* Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).

3. *Hale J. Theory of functional-differential equations.* Moscow: Mir, 1984 (in Russian).

4. *Collatz L. Functional analysis and computational mathematics.* Moscow: Mir, 1969 (in Russian).

5. *Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko V. Ya. Approximate Solution of Operator Equations.* Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).

6. *Tsalyuk Z. B.* Volterra integral equations // *Ser. Mat. Analiz.* / Results of Science and Technology. 1977. V. 15. P. 131–198 (in Russian).

7. *Pertsev N. V.* Two-sided estimates for solutions to the Cauchy problem for wazewski linear differential systems with delay // *Sib. Math. J.* 2013. V. 54, № 6. P. 1368–1379.

8. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *In: Functional Differential Equations and Applications* (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

Информация об авторе

Николай Викторович Перцев, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN-код: 9626-6689, AuthorID: 123164

Scopus Author ID 8964903300

Author Information

Nickolay V. Pertsev, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN-code: 9626-6689, AuthorID: 123164

Scopus Author ID 8964903300

Статья поступила в редакцию 31.07.2024;
одобрена после рецензирования 17.09.24; принята к публикации 26.09.2024

The article was submitted 31.07.2024;
approved after reviewing 17.09.24; accepted for publication 26.09.2024