Научная статья

УДК 517.95

DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-30-51

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ЦИЛИНДРЕ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Лина Николаевна Бондарь [1],
Синь Ма[2]

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

[1]l.bondar@g.nsu.ru, [2]s.ma2@g.nsu.ru

Аннотация

В работе рассматривается первая краевая задача в цилиндре для одного уравнения шестого порядка, не разрешенного относительно старшей производной по времени. Исследуемое уравнение является строго псевдогиперболическим с младшими членами. В работе доказаны существование и единственность обобщенного решения краевой задачи в анизотропном соболевском пространстве, получены оценки на решение.

Ключевые слова и фразы

псевдогиперболическое уравнение, краевая задача, обобщенное решение, анизотропное соболевское пространство, обобщенное уравнение Буссинеска.

Источник финансирования

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, https://rscf.ru/project/24-21-00370/.)

Для цитирования

Бондарь Л. Н., Ма С. О краевой задаче в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения шестого порядка // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 30-51. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-30-51

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С.30-51
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 30-51

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CYLINDER FOR A SIXTH-ORDER PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION

Lina N. Bondar[1], **Ma Xin**[2]

Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

[1]l.bondar@g.nsu.ru, [2]s.ma2@g.nsu.ru

Abstract

The paper considers the first boundary value problem in a cylinder for one sixth-order equation not resolved with respect to the highest derivative. Equation under study is a strictly pseudohyperbolic with lower terms. In this work, the existence and uniqueness of a generalized solution to a boundary value problem in an anisotropic Sobolev space is proved, and estimates for the solution are obtained.

Keywords

pseudohyperbolic equation, boundary value problem, generalized solution, anisotropic Sobolev space, generalized Boussinesq equation.

Funding

The research of the first author is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00370).

For citation

Bondar L. N., Ma X. On a boundary value problem in a cylinder for a sixth-order pseudohyperbolic equation //*Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 3, P. 30-51. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-30-51

§ 1. Введение и предварительные сведения

В работе рассматривается первая краевая задача в цилиндре $Q_T = \{(t,x) \in R_+^{n+1} : t \in (0,T), x \in G \subset R^n\}$ для уравнения, не разрешенного относительно старшей производной:

$$\left(a_0 I + a_1\Delta + a_2\Delta^2\right) D_t^2 u + \left(b_0 I + b_1\Delta + b_2\Delta^2\right) D_t u$$
$$+ \left(d_0 I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3\right) u = f(t,x), \qquad (1.1)$$

где $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, $a_2b_0 \ge 0$, $a_2b_1 \le 0$, $a_2b_2 \ge 0$, $a_2d_0 \ge 0$, $a_2d_1 \le 0$, $a_2d_2 \ge 0$, $a_2d_3 < 0$.

Уравнение (1.1) при $a_2 d_3 < 0$ относится к классу строго псевдогиперболических уравнений. Этот класс уравнений был введен в монографии [1].

Рассматриваемое уравнение в одномерном случае есть линеаризованная модель обобщенного уравнения Буссинеска (см. [2]), которое описывает распространение поверхностных волн в воде. Задача Коши для нелинейных обобщенных уравнений Буссинеска изучалась в [3–5].

Наша цель — доказательство существования и единственности обобщенного решения первой краевой задачи в цилиндре для уравнения (1.1), получение оценок на решение.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим первую краевую задачу для псевдогиперболического уравнения в цилиндре $Q_T = \{(t,x) \in R_+^{n+1} : t \in (0,T), x \in G \subset R^n\}$:

$$\begin{cases} (a_0 I + a_1\Delta + a_2\Delta^2)\, D_t^2 u + (b_0 I + b_1\Delta + b_2\Delta^2)\, D_t u \\ + (d_0 I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3)\, u = f(t,x), \\ \\ u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad D_t u\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ \\ u\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$, $a_2 b_0 \geq 0$, $a_2 b_1 \leq 0$, $a_2 b_2 \geq 0$, $a_2 d_0 \geq 0$, $a_2 d_1 \leq 0$, $a_2 d_2 \geq 0$, $a_2 d_3 < 0$. Здесь G —ограниченная область с гладкой границей ∂G, ν —единичный вектор внешней нормали к ∂G,

$$S_{\text{бок}} = \left\{(t,x) \in \overline{Q_T} :\ t \in (0,T), \quad x \in \partial G\right\}.$$

Для определенности будем считать, что $a_2 > 0$, тогда $a_0 > 0$, $b_0 \geq 0$, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$, $d_0 \geq 0$, $d_1 \leq 0$, $d_2 \geq 0$ и $d_3 < 0$. Поскольку по условию $a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2} < 0$, то удобнее уравнение переписать в виде:

$$\left(\sqrt{a_0} I + \sqrt{a_2}\Delta\right)^2 D_t^2 u + \left(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}\right)\Delta D_t^2 u + \left(b_0 I + b_1\Delta + b_2\Delta^2\right) D_t u$$
$$+ \left(d_0 I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3\right) u = f(t,x).$$

Предположим, что существует классическое решение задачи (2.1): функция $u(t,x) \in C^{2,6}(Q_T)$. Тогда имеет место тождество:

$$\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)^2 D_t^2 u(t,x)+\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\Delta D_t^2 u(t,x)$$
$$+\left(b_0I+b_1\Delta+b_2\Delta^2\right)D_tu(t,x)+\left(d_0I+d_1\Delta+d_2\Delta^2\right)u(t,x) \tag{2.2}$$
$$+d_3\Delta^3u(t,x)\equiv f(t,x),\qquad (t,x)\in Q_T.$$

Умножим тождество на произвольную функцию $v(t,x)\in W_2^{1,3}(Q_T)$, такую, что существуют обобщенные производные $D_t\Delta v(t,x)$ в Q_T,

$$D_t\Delta v(t,x)\in L_2(Q_T),$$

и удовлетворющую условиям:

$$v\Big|_{t=T}=0,\qquad v\Big|_{S_{\text{бок}}}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{S_{\text{бок}}}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2}\Big|_{S_{\text{бок}}}=0, \tag{2.3}$$

и представим полученное тождество в виде

$$D_tA(t,x)+div_xB(t,x)+C(t,x)\equiv f(t,x)v(t,x). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(t,x)=&\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)^2D_tu(t,x)v(t,x)\\ &+\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\Delta D_tu(t,x)v(t,x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} B(t,x)=&-\sqrt{a_2}\nabla\Big(\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tu(t,x)\Big)D_tv(t,x)\\ &+\sqrt{a_2}\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tu(t,x)\nabla D_tv(t,x)\\ &-\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\nabla D_tu(t,x)D_tv(t,x)+b_1\nabla D_tu(t,x)v(t,x)\\ &+b_2\left(\nabla D_t\Delta u(t,x)v(t,x)-D_t\Delta u(t,x)\nabla v(t,x)\right)+d_1\nabla u(t,x)v(t,x)\\ &+d_2\left(\nabla\Delta u(t,x)v(t,x)-\Delta u(t,x)\nabla v(t,x)\right)+d_3\left(\nabla\Delta^2u(t,x)v(t,x)\right.\\ &\left.-\Delta^2u(t,x)\nabla v(t,x)+\nabla\Delta u(t,x)\Delta v(t,x)\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} C(t,x)=&-\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tu(t,x)\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tv(t,x)\\ &+\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\nabla D_tu(t,x)\nabla D_tv(t,x)+b_0D_tu(t,x)v(t,x)\\ &-b_1\nabla D_tu(t,x)\nabla v(t,x)+b_2D_t\Delta u(t,x)\Delta v(t,x)\\ &+d_0u(t,x)v(t,x)-d_1\nabla u(t,x)\nabla v(t,x)\\ &+d_2\Delta u(t,x)\Delta v(t,x)-d_3\nabla\Delta u(t,x)\nabla\Delta v(t,x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Проинтегрируем тождество (2.4) по цилиндру Q_T и воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\int_G \big[A(t,x)|_{t=T} - A(t,x)|_{t=0}\big]\,dx + \int_0^T \int_{\partial G} B(t,x)\cdot\nu\,dSdt$$

$$+\int_{Q_T} C(t,x)\,d\overline{x} \equiv \int_{Q_T} f(t,x)v(t,x)\,d\overline{x}, \quad \overline{x}=(t,x). \tag{2.8}$$

Используя условия задачи (2.1), условия (2.3), а также определения $A(t,x)$ из (2.5), $B(t,x)$ из (2.6), имеем

$$\int_G \big[A(t,x)|_{t=T} - A(t,x)|_{t=0}\big]\,dx = -\int_G \big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)^2\varphi_2(x)v(0,x)\,dx$$

$$-\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \Delta\varphi_2(x)v(0,x)\,dx$$

$$= -\int_G \big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)v(0,x)\,dx$$

$$+\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v(0,x)\,dx,$$

где $v(0,x)=v|_{t=0}$ — след функция $v(t,x)\in W_2^{1,3}(Q_T)$,

$$B(t,x)|_{x\in\partial G}=0.$$

Тогда тождество (2.8) примет вид

$$\int_{Q_T} C(\overline{x})\,d\overline{x} \equiv \int_{Q_T} f(\overline{x})v(\overline{x})\,d\overline{x}$$

$$+\int_G \big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)v(0,x)\,dx$$

$$-\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v(0,x)\,dx, \quad \overline{x}=(t,x).$$

Учитывая определение $C(t,x)$ из (2.7), будем иметь

$$\int_{Q_T}\Big(-\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tu\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tv$$

$$+\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\nabla D_tu\nabla D_tv + b_0D_tuv - b_1\nabla D_tu\nabla v + b_2D_t\Delta u\Delta v$$

$$+d_0uv - d_1\nabla u\nabla v + d_2\Delta u\Delta v - d_3\nabla\Delta u\nabla\Delta v\Big)\,d\overline{x}$$

$$= \int_{Q_T} fv\, d\overline{x} + \int_G \big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v(0,x)\, dx$$

$$-\big(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v(0,x)\, dx, \quad \overline{x} = (t,x). \tag{2.9}$$

Обозначим через

$$W^{1,3}_{2,add}(Q_T) = \big\{u(t,x) \in W^{1,3}_2(Q_T) : \exists D_t\Delta u(t,x) \in L_2(Q_T)\big\}.$$

Сформулируем определение обобщенного решения задачи (2.1).

Определение 1. Пусть функции $f(t,x) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_1(x) \in \mathring{W}^3_2(G)$, $\varphi_2(x) \in \mathring{W}^2_2(G)$. Тогда $u(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$ такая, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad u\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \tag{2.10}$$

называется *обобщенным решением* первой краевой задачи (2.1), если для любой $v(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$, удовлетворяющей (2.3), имеет место (2.9).

§ 3. Теорема единственности

Теорема 1. *Краевая задача (2.1) не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, что существует два обобщенного решения задачи (2.1): $u_1(t,x) \not\equiv u_2(t,x)$. Тогда $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$ — обобщенное решение задачи:

$$\begin{cases} \big(a_0 I + a_1\Delta + a_2\Delta^2\big)D_t^2 u + \big(b_0 I + b_1\Delta + b_2\Delta^2\big)D_t u \\ +\big(d_0 I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3\big)u = 0, \\ u\Big|_{t=0} = 0, \qquad D_t u\Big|_{t=0} = 0, \\ u\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

При этом из (2.9) получим:

$$\int_{Q_T}\Big(-\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)D_t u\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)D_t v$$

$$+\big(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}\big)\nabla D_t u\nabla D_t v + b_0 D_t u v - b_1\nabla D_t u\nabla v + b_2 D_t\Delta u\Delta v$$

$$+d_0uv - d_1\nabla u\nabla v + d_2\Delta u\Delta v - d_3\nabla\Delta u\nabla\Delta v\Big)\,d\overline{x} = 0, \quad \overline{x} = (t,x), \tag{3.2}$$

для любого $v(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$,

$$v\Big|_{t=T} = 0, \qquad v\Big|_{S_{бок}} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{S_{бок}} = \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\Big|_{S_{бок}} = 0.$$

Далее будем следовать схеме из [6, 7]. Зафиксируем произвольное $\tau \in (0,T)$ и возьмём в качестве функции v следующую:

$$v(t,x) = \begin{cases} \int_t^\tau u(s,x)ds, & t \in (0,\tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $v(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$, причём

$$D_t v(t,x) = \begin{cases} -u(t,x), & t \in (0,\tau), \\ 0, & t \in (\tau, T), \end{cases}$$

$$D_{x_i} v(t,x) = \begin{cases} \int_t^\tau D_{x_i} u(s,x)ds, & t \in (0,\tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

Очевидно также, что

$$v\Big|_{t=T} = 0, \qquad v\Big|_{S_{бок}} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{S_{бок}} = \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\Big|_{S_{бок}} = 0.$$

Подставим указанную функцию v в (3.2), интегрируя по частям по переменной t некоторые слагаемые, будем иметь:

$$\int_0^\tau \int_G \Bigg[D_t\Big[\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)u\Big]^2 - \big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)D_t|\nabla u(t,x)|^2 + 2b_0(u(t,x))^2$$

$$-2b_1|\nabla u(t,x)|^2 + 2b_2(\Delta u(t,x))^2 - d_0D_t\left(\int_t^\tau u(s,x)ds\right)^2$$

$$+d_1D_t\left|\int_t^\tau \nabla u(s,x)ds\right|^2 - d_2D_t\left(\int_t^\tau \Delta u(s,x)ds\right)^2$$

$$+d_3D_t\left|\int_t^\tau \nabla\Delta u(s,x)ds\right|^2\Bigg]\,dx\,dt = 0. \tag{3.3}$$

Учитывая, что $u\big|_{t=0} = 0$, из (3.3) получим

$$\int_G \Big(\big(\sqrt{a_0} I + \sqrt{a_2}\Delta\big) u(\tau, x) \Big)^2 dx - \big(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}\big) \int_G |\nabla u(\tau, x)|^2 \, dx$$

$$+2b_0 \int_G \int_0^\tau (u(t,x))^2 dt\, dx - 2b_1 \int_G \int_0^\tau |\nabla u(t,x)|^2 \, dt\, dx$$

$$+2b_2 \int_G \int_0^\tau (\Delta u(t,x))^2 \, dt\, dx + d_0 \int_G \left(\int_0^\tau u(t,x)\, dt \right)^2 dx$$

$$-d_1 \int_G \left| \int_0^\tau \nabla u(t, x\, dt \right|^2 dx + d_2 \int_G \left(\int_0^\tau \Delta u(t,x) dt \right)^2 dx$$

$$-d_3 \int_G \left| \int_0^\tau \nabla \Delta u(t,x) dt \right|^2 dx = 0.$$

В силу условий на коэффициенты $a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2} < 0$, $b_0, b_2, d_0, d_2 \geq 0$, $b_1, d_1 \leq 0$, $d_3 < 0$. Отсюда имеем $\int_G \big(D_{x_i} u(\tau, x)\big)^2 dx = 0, i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $D_{x_i} u(\tau, x) = 0$ почти всюду в G для $i = 1, \ldots, n$. Так как $u|_{S_{\text{бок}}} = 0$ и $u(t,x) \in W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$, в силу произвольности $\tau \in (0, T)$ получаем $u(\tau, x) = 0$ почти всюду в Q_T. Противоречие.

§ 4. Теорема существования

Теорема 2. *Пусть $f(t,x) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}^3_2(G)$, $\varphi_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(G)$. Тогда краевая задача (2.1) имеет единственное обобщенное решение $u(t,x)$ из $W^{1,3}_{2,add}(Q_T)$, при этом*

$$\|u(t,x), W_2^{1,3}(Q_T)\| + \|D_t \Delta u(t,x), L_2(Q_T)\| \leq c \Bigg(\|f(t,x), L_2(Q_T)\|$$

$$+ \|\varphi_1(x), W_2^3(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^2(G)\| \Bigg). \tag{4.1}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от f, φ_1, φ_2.

Доказательство существования обобщённого решения краевой задачи (2.1) будем проводить по известной схеме, строя последовательность приближённых решений методом Галёркина (см., например, [6–8]). Отметим, что в силу теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда

$$\|f(t,x), L_2(Q_T)\| + \|\varphi_1(x), W_2^3(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^2(G)\| \neq 0.$$

Отметим, что поскольку $a_1 - 2\sqrt{a_0a_2} < 0$, то далее для удобства пространство $\mathring{W}_2^2(G)$ будем рассматривать как гильбертово пространство с нормой

$$\|u, \mathring{W}_2^2(G)\|^2 = \int_G |(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta)u(x)|^2 dx - \left(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\right)\int_G |\nabla u(x)|^2 dx,$$

порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)} = \int_G (\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta)u(x)(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta)v(x)dx$$
$$-\left(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\right)\int_G \nabla u(x)\nabla v(x)dx. \tag{4.2}$$

Пусть $\{v_p(x)\}$ — базис в $\mathring{W}_2^3(G)$, ортонормированный в $\mathring{W}_2^2(G)$. Можно считать, что $v_p(x) \in C_0^\infty(G)$.

Последовательность приближённых решений $u^m(t,x)$ будем искать в виде

$$u^m(t,x) = \sum_{p=1}^{m} c_p^m(t)v_p(x), \tag{4.3}$$

при этом коэффициенты $c_p^m(t) \in W_2^2(0,T)$ определяются следующими соотношениями:

$$\int_G \Big[\left(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\right)^2 D_t^2 u^m + \left(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\right)\Delta D_t^2 u^m + (b_0I + b_1\Delta + b_2\Delta^2)D_t u^m$$
$$+(d_0I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3)u^m\Big] v_k(x)dx = \int_G f(t,x)v_k(x)\,dx, \tag{4.4}$$

$k = 1, \ldots, m$, и начальными условиями

$$c_p^m\big|_{t=0} = \varphi_p^m, \tag{4.5}$$

где φ_p^m — коэффициенты в представлении функций

$$\varphi_1^m(x) = \sum_{p=1}^{m} \varphi_p^m v_p(x), \tag{4.6}$$

таких, что

$$\|\varphi_1^m(x) - \varphi_1(x), W_2^3(G)\| \to 0, \qquad m \to \infty, \tag{4.7}$$
$$D_t c_p^m(t)\big|_{t=0} = \langle \varphi_2(x), v_p(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}. \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.4) функции $u^m(t,x)$ из (4.3), применяя формулу Гаусса–Остроградского к некоторым слагаемым, учитывая определение (4.2), будем иметь

$$\sum_{p=1}^{m} D_t^2 c_p^m(t) \langle v_p(x), v_k(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}$$

$$+\sum_{p=1}^{m} D_t c_p^m(t)\int_G \Big(b_0 v_p(x)v_k(x) - b_1\nabla v_p(x)\nabla v_k(x) + b_2\Delta v_p(x)\Delta v_k(x)\Big)dx$$

$$+\sum_{p=1}^{m} c_p^m(t)\int_G \Big(d_0 v_p(x)v_k(x) - d_1\nabla v_p(x)\nabla v_k(x) + d_2\Delta v_p(x)\Delta v_k(x)$$

$$-d_3\nabla\Delta v_p(x)\nabla\Delta v_k(x)\Big)dx = \int_G f(t,x)v_k(x)dx, \quad k=1,\ldots,m. \tag{4.9}$$

Учитывая, что $\langle v_p(x), v_k(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)} = \delta_{pk}$, $p,k=1,\ldots,m$, δ_{pk} — символ Кронекера, вводя обозначения

$$b_{kp} = \int_G \Big(b_0 v_p(x)v_k(x) - b_1\nabla v_p(x)\nabla v_k(x) + b_2\Delta v_p(x)\Delta v_k(x)\Big)dx,$$

$$d_{kp} = \int_G \Big(d_0 v_p(x)v_k(x) - d_1\nabla v_p(x)\nabla v_k(x) + d_2\Delta v_p(x)\Delta v_k(x)$$

$$-d_3\nabla\Delta v_p(x)\nabla\Delta v_k(x)\Big)dx,$$

$B=(b_{kp})$, $D=(d_{kp})$,

$$F^m(t) = \Big(F_1(t),\ldots,F_m(t)\Big)^T, \quad c^m(t) = \Big(c_1^m(t),\ldots,c_m^m(t)\Big)^T,$$

где

$$F_k(t) = \int_G f(t,x)v_k(x)dx,$$

соотношения (4.9) можно переписать в виде

$$D_t^2 c^m(t) + BD_t c^m(t) + Dc^m(t) = F^m(t),$$

причем, как следует из определения $u^m(t,x)$,

$$c^m(0) = c^{m,0} = \Big(\varphi_1^m,\ldots,\varphi_m^m\Big)^T,$$

$$D_t c^m(0) = c^{m,1} = \Big(\langle \varphi_2(x), v_1(x) \rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}, \ldots, \langle \varphi_2(x), v_m(x) \rangle_{\mathring{W}_2^2(G)} \Big)^T.$$

Итак, для нахождения вектор-функции $c^m(t)$ получили задачу Коши:

$$\begin{cases} D_t^2 c^m(t) + B D_t c^m(t) + D c^m(t) = F^m(t), \\ c^m(0) = c^{m,0}, \qquad D_t c^m(0) = c^{m,1}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Поскольку вектор-функция $F^m(t)$ имеет компоненты из $L_2(0,T)$, то нетрудно показать, что существует единственное решение задачи Коши (4.10) — вектор-функция $c_p^m(t) \in W_2^2(0,T)$, и последовательность галёркинских приближений $u^m(t,x)$ корректно определена.

Лемма 1. *Для любого натурального m выполняется оценка*

$$\Big[\int_G \Big| (\sqrt{a_0} I + \sqrt{a_2} \Delta)\, D_t u^m(t,x) \Big|^2 dx$$

$$- \Big(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2} \Big) \int_G \Big| D_t \nabla u^m(t,x) \Big|^2 dx$$

$$- d_3 \int_G \Big| \nabla \Delta u^m(t,x) \Big|^2 dx \Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant c \Big(\int_0^t \| f(\tau,x), L_2(G) \| d\tau$$

$$+ \| \varphi_1^m(x), W_2^3(G) \| + \| \varphi_2(x), W_2^2(G) \| \Big), \tag{4.11}$$

где $c > 0$—константа, не зависящая от m, f, φ_1^m, φ_2.

Доказательство. Умножая k-е соотношение (4.4) на $D_t c_k^m$ и суммируя по от 1 до m, с учётом определения функции $u^m(t,x)$ получим

$$\int_G \Big[\big(\sqrt{a_0} I + \sqrt{a_2} \Delta \big)^2 D_t^2 u^m + \big(a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2} \big) \Delta D_t^2 u^m + (b_0 I + b_1 \Delta + b_2 \Delta^2) D_t u^m$$

$$+ (d_0 I + d_1 \Delta + d_2 \Delta^2 + d_3 \Delta^3) u^m \Big] D_t u^m dx = \int_G f D_t u^m \, dx.$$

Воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского, учитывая равенства

$$u^m(t,x) \Big|_{S_{\text{бок}}} = D_{x_i} u^m(t,x) \Big|_{S_{\text{бок}}} = D^2_{x_i x_j} u^m(t,x) \Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad i,j = 1, \ldots, n,$$

будем иметь

$$\int_G D_t \Big[\big(\sqrt{a_0} I + \sqrt{a_2} \Delta \big) D_t u^m \Big]^2 dx$$

$$-\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\int_G D_t\left(\left|D_t\nabla u^m\right|^2\right)dx$$

$$+2b_0\int_G\left|D_tu^m\right|^2dx-2b_1\int_G\left|D_t\nabla u^m\right|^2dx$$

$$+2b_2\int_G\left|D_t\Delta u^m\right|^2dx+d_0\int_G D_t\left(\left|u^m\right|^2\right)dx$$

$$-d_1\int_G D_t\left(\left|\nabla u^m\right|^2\right)dx+d_2\int_G D_t\left(\left|\Delta u^m\right|^2\right)dx$$

$$-d_3\int_G D_t\left(\left|\nabla\Delta u^m\right|^2\right)dx=2\int_G f(t,x)D_tu^m\,dx.$$

Проинтегрируем от 0 до t, будем иметь

$$\int_G\left|\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tu^m(t,x)\right|^2dx-\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\int_G\left|D_t\nabla u^m(t,x)\right|^2dx$$

$$+2b_0\int_0^t\int_G\left|D_\tau u^m(\tau,x)\right|^2dx\,d\tau-2b_1\int_0^t\int_G\left|D_\tau\nabla u^m(\tau,x)\right|^2dx\,d\tau$$

$$+2b_2\int_0^t\int_G\left|D_\tau\Delta u^m(\tau,x)\right|^2dx\,d\tau+d_0\int_G\left|u^m(t,x)\right|^2dx$$

$$-d_1\int_G\left|\nabla u^m(t,x)\right|^2dx+d_2\int_G\left|\Delta u^m(t,x)\right|^2dx-d_3\int_G\left|\nabla\Delta u^m(t,x)\right|^2dx$$

$$=2\int_0^t\int_G f(\tau,x)D_\tau u^m\,dx\,d\tau+\int_G\left|\left(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\right)D_tu^m(0,x)\right|^2dx$$

$$-\left(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\right)\int_G\left|D_t\nabla u^m(0,x)\right|^2dx$$

$$+d_0\int_G\left|u^m(0,x)\right|^2dx-d_1\int_G\left|\nabla u^m(0,x)\right|^2dx$$

$$+d_2\int_G\left|\Delta u^m(0,x)\right|^2dx-d_3\int_G\left|\nabla\Delta u^m(0,x)\right|^2dx.$$

Отсюда в силу неравенства Гёльдера и неравенства Гронуолла, учитывая, что $b_0\ge0$, $b_1\le0$, $b_2\ge0$, $d_0\ge0$, $d_1\le0$, $d_2\ge0$ и $d_3<0$ имеем

$$\left[\left\|D_tu^m(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\right\|^2-d_3\int_G\left|\nabla\Delta u^m(t,x)\right|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le c\left(\int_0^t\left\|f(\tau,x),L_2(G)\right\|d\tau+\left\|u^m(0,x),W_2^3(G)\right\|+\left\|D_tu^m(0,x),W_2^2(G)\right\|\right),$$

где $c > 0$—константа, не зависящая от m, f. Следовательно, учитывая определения (4.5)–(4.8), свойства системы функций v_p и неравенство Бесселя, получим оценку (4.11). Лемма доказана.

Отметим, что из оценки (4.11) и условий (4.6), (4.7) следует, что существует натуральное число m_0, такое, что при $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\left[\Big\|D_t u^m(t,x), \mathring{W}_2^2(G)|Bigr\|^2 - d_3\int_G \left|\nabla\Delta u^m(t,x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\left(\int_0^t \left\|f(\tau,x), L_2(G)\right\| d\tau + \left\|\varphi_1(x), W_2^3(G)\right\| + \left\|\varphi_2(x), W_2^2(G)\right\|\right).$$

Учитывая неравенство Стеклова, условия на коэффициенты уравнения, неравенство Гельдера, будем иметь при $m \geq m_0$, $t \in [0,T]$,

$$\left(\left\|D_t u^m(t,x), L_2(G)\right\|^2 + \left\|D_t\Delta u^m(t,x), L_2(G)\right\|^2 + \left\|u^m(t,x), W_2^3(G)\right\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq c(G,T)\left(\left\|f(t,x), L_2(Q_T)\right\| + \left\|\varphi_1(x), W_2^3(G)\right\| + \left\|\varphi_2(x), W_2^2(G)\right\|\right).$$

Проинтегрируем это неравенство по t от 0 до T. Получим

$$\left\|u^m(t,x), W_2^{1,3}(Q_T)\right\| + \left\|D_t\Delta u^m(t,x), L_2(Q_T)\right\|$$

$$\leq c(G,T)\left(\left\|f(t,x), L_2(Q_T)\right\| + \left\|\varphi_1(x), W_2^3(G)\right\| + \left\|\varphi_2(x), W_2^2(G)\right\|\right). \quad (4.12)$$

Поскольку из любой ограниченной в $L_2(Q_T)$ последовательности можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к функции из пространства $L_2(Q_T)$ (см., например, [9, 10]), то, учитывая теорему о слабой замкнутости оператора обобщённого дифференцирования (см., например, [7]), получим, что из $\{u^m\}$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_{2,add}^{1,3}(Q_T)$ к некоторой функции $u \in W_{2,add}^{1,3}(Q_T)$. Будем обозначать эту подпоследовательность также $\{u^m\}$.

Изучим некоторые свойства предельной функции $u(t,x)$.

Используя теорему Мазура (см., [11]) и слабо сходящуюся галёркинскую последовательность $\{u^{m_i}\}$, построим сильно сходящуюся последовательность $\{\widetilde{u}^N\}$ выпуклых комбинаций:

$$\widetilde{u}^N(t,x) = \sum_{i=m_0}^N \lambda_{i,N} u^i(t,x), \qquad \lambda_{i,N} \geqslant 0, \quad \sum_{i=m_0}^N \lambda_{i,N} = 1, \quad (4.13)$$

$$\|\widetilde{u}^N(t,x) - u(t,x), W_2^{1,3}(Q_T)\| \to 0, \qquad N \to \infty, \quad (4.14)$$

$$\left\|D_t\Delta\widetilde{u}^N(t,x)-D_t\Delta u(t,x),L_2(Q_T)\right\|\to 0,\qquad N\to\infty,\tag{4.15}$$

Из определения (4.13) и в силу неравенства (4.12) для любого N следует

$$\left\|\widetilde{u}^N(t,x),W_2^{1,3}(Q_T)\right\|+\left\|D_t\Delta\widetilde{u}^N(t,x),L_2(Q_T)\right\|\le c_1\left(\left\|f(t,x),L_2(Q_T)\right\|\right.$$
$$\left.+\left\|\varphi_1(x),W_2^3(G)\right\|+\left\|\varphi_2(x),W_2^2(G)\right\|\right).$$

Поэтому, учитывая (4.14)–(4.15), для функции $u(t,x)$ получаем оценку (4.1).

Из (4.13) вытекает также

$$\widetilde{u}^N\big|_{S_{\text{бок}}}=D_{x_i}\widetilde{u}^N\big|_{S_{\text{бок}}}=D^2_{x_ix_j}\widetilde{u}^N\big|_{S_{\text{бок}}}=0,$$

для любых $i,j=1,\dots,n$. Поэтому, учитывая теорему о следах для анизотропных соболевских пространств (см., например, [12]), будем при $|\beta|\leqslant 2$ иметь

$$\left\|D_x^\beta\widetilde{u}^N(t,x)-D_x^\beta u(t,x),L_2(S_{\text{бок}})\right\|\leqslant c\left\|\widetilde{u}^N(t,x)-u(t,x),W_2^{1,3}(Q_T)\right\|,$$

следовательно, в силу (4.13) предельная функция $u(t,x)$ имеет нулевой след

$$u\Big|_{S_{\text{бок}}}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{S_{\text{бок}}}=\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\Big|_{S_{\text{бок}}}=0.\tag{4.16}$$

Для доказательства того, что

$$u\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\tag{4.17}$$

нам понадобится следующая лемма:

Лемма 2. *Если $v(t,x)\in W_2^{1,3}(Q_T)$, то для любого $\tau\in(0,T)$ справедливо неравенство*

$$\|v(0,x),L_2(G)\|^2\leqslant\frac{2}{\tau}\int_0^\tau\int_G\left|v(s,x)\right|^2dx\,ds+\tau\int_0^\tau\int_G\left|D_sv(s,x)\right|^2dx\,ds.\tag{4.18}$$

Доказательство. Очевидно, неравенство (4.18) достаточно доказать для функций $v(t,x)\in C^\infty(\overline{Q_T})$.

В силу формулы Ньютона –Лейбница имеем

$$\int_G|v(0,x)|^2\,dx=\int_G\left|v(t,x)-\int_0^t D_sv(s,x)\,ds\right|^2dx$$

и интегрируя по интервалу $(0,\tau)$, получим

$$\tau\int_G|v(0,x)|^2\,dx=\int_0^\tau\int_G\left|v(t,x)-\int_0^t D_sv(s,x)\,ds\right|^2dx\,dt.$$

Отсюда, очевидно,

$$\tau\int_G |v(0,x)|^2dx \leqslant 2\int_0^\tau\int_G |v(t,x)|^2dx\,dt + 2\int_0^\tau\int_G\left|\int_0^t D_sv(s,x)ds\right|^2dx\,dt.$$

Применяя неравенство Гельдера и интегрируя по частями по t во втором слагаемом, получаем

$$\tau\int_G |v(0,x)|^2dx \leqslant 2\int_0^\tau\int_G |v(t,x)|^2dx\,dt + 2\int_0^\tau\int_G t\left(\int_0^t |D_sv(s,x)|^2ds\right)dx\,dt$$
$$= 2\int_0^\tau\int_G |v(t,x)|^2ds\,dx + \left(t^2\int_G\int_0^t |D_sv(s,x)|^2dsdx\right)\Big|_0^\tau$$
$$-\int_0^\tau t^2\int_G |D_tv(t,x)|^2dxdt.$$

Следовательно, имеем

$$\tau\int_G |v(0,x)|^2dx \leqslant 2\int_0^\tau\int_G |v(t,x)|^2dx\,dt + \tau^2\int_0^\tau\int_G |D_sv(s,x)|^2dxds.$$

Отсюда вытекает неравенство (4.18). Лемма доказана.

Докажем теперь следующее свойство для следа предельной функции $u(t,x)$ на нижнем основании цилиндра Q_T:

$$\|u^m(0,x)-u(0,x),L_2(G)\| \to 0, \qquad m\to\infty. \tag{4.19}$$

Напомним, что последовательность $\{u^m(t,x)\}$ сходится слабо к функции $u(t,x)$ в $W_2^{1,3}(Q_T)$. Следовательно, по теореме Реллиха из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(Q_T)$ сильно. Для сокращения записи будем обозначать ее тем же символом $\{u^m(t,x)\}$. Тогда равномерно по $\tau\in(0,T)$, очевидно, имеем

$$\int_0^\tau\int_G |u^m(s,x)-u(s,x)|^2dxds \to 0, \qquad m\to\infty. \tag{4.20}$$

Применим лемму 2 к последовательности $\{u^m(t,x)-u(t,x)\}$. Из неравенства (4.18) вытекает

$$\|u^m(0,x)-u(0,x),L_2(G)\|^2 \leqslant \frac{2}{\tau}\int_0^\tau\int_G \left|u^m(s,x)-u(s,x)\right|^2dxds$$
$$+\tau\int_0^\tau\int_G \left|D_su^m(s,x)-D_su(s,x)\right|^2dxds.$$

Функции $u(t,x)$ и $u^m(t,x)$ удовлетворяют неравенствам (4.1) и (4.12) соответственно. Поэтому за счет выбора числа $\tau\in(0,T)$ второе слагаемое справа может быть сколь угодно мало не зависимо от m. Следовательно, учитывая сходимость (4.20), получаем (4.19).

Из определения начальных условий (4.5)–(4.7) для галеркинских приближений $u^m(t,x)$ из (4.3) имеем

$$\|u^m(0,x)-\varphi_1(x),W_2^2(G)\|\to 0,\qquad m\to\infty.$$

Поэтому из (4.19) непосредственно вытекает равенство (4.17).

Итак, предельная функция $u(t,x)\in W_2^{1,3}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству (4.1), для нее выполнены условия (4.16), (4.17).

Покажем, что предельная функция $u\in W_{2,add}^{1,3}(Q_T)$ является обобщённым решением первой краевой задачи (2.1).

Умножая k-е соотношение (4.4) на $a_k(t)$ и суммируя по k от 1 до l, $l\in N$, $l\geq m_0$, с учётом обозначений

$$v^l(t,x)=\sum_{k=1}^{l}a_k(t)v_k(x),\quad a_k(t)\big|_{t=T}=0,\quad a_k(t)\in W_2^2(0,T),\tag{4.21}$$

получим

$$\int_G\Big[\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)^2D_t^2u^m+\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\Delta D_t^2u^m$$

$$+\big(b_0I+b_1\Delta+b_2\Delta^2\big)D_tu^m+\big(d_0I+d_1\Delta+d_2\Delta^2+d_3\Delta^3\big)u^m\Big]v^l(t,x)\,dx$$

$$=\int_G f(t,x)v^l(t,x)\,dx,\quad m\geq l.$$

Проинтегрируем от 0 до T и воспользуемся формулой Гаусса –Остроградского, учитывая, что $v^l(t,x)$ по построению удовлетворяет (2.3), будем иметь

$$\int_{Q_T}\Big(-\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tu^m\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tv^l$$

$$+\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\nabla D_tu^m\nabla D_tv^l+b_0D_tu^mv^l-b_1\nabla D_tu^m\nabla v^l+b_2D_t\Delta u^m\Delta v^l$$

$$+d_0u^mv^l-d_1\nabla u^m\nabla v^l+d_2\Delta u^m\Delta v^l-d_3\nabla\Delta u^m\nabla\Delta v^l\Big)\,d\overline{x}=\int_{Q_T}f(t,x)v^l(t,x)\,d\overline{x}$$

$$+\int_G\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tu^m(0,x)\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)v^l(0,x)\,dx$$

$$-\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G D_t\nabla u^m(0,x)\nabla v^l(0,x)\,dx,\quad \overline{x}=(t,x),\quad m\geq l.$$

Из определения начальных условий (4.8) и последовательности $\{u^m\}$ имеем при $m \geqslant m_0$

$$\int_G \big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)\Big(D_t u^m(0,x) - \varphi_2(x)\Big)\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v^l(0,x)\,dx$$

$$-\big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \Big(D_t\nabla u^m(0,x) - \nabla\varphi_2(x)\Big)\nabla v^l(0,x)\,dx$$

$$= \int_G \big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)\left(\sum_{p=1}^{m}\langle\varphi_2(x), v_p(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)} v_p(x) - \varphi_2(x)\right)$$

$$\times \sum_{k=1}^{l} a_k(0)\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v_k(x)dx - \big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)$$

$$\times \int_G \left(\sum_{p=1}^{m}\langle\varphi_2(x), v_p(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}\nabla v_p(x) - \nabla\varphi_2(x)\right)$$

$$\times \sum_{k=1}^{l} a_k(0)\nabla v_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{l} a_k(0)\sum_{p=1}^{m}\langle\varphi_2(x), v_p(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}$$

$$\Bigg(\int_G \big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v_p(x)\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v_k(x)\,dx$$

$$-\ \big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla v_p(x)\nabla v_k(x)\,dx\Bigg)$$

$$-\sum_{k=1}^{l} a_k(0)\left(\int_G \big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)v_k(x)\,dx\right.$$

$$\left.-\ \big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v_k(x)dx\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{l} a_k(0)\left(\langle\varphi_2(x), v_k(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)} - \langle\varphi_2(x), v_k(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{Q_T}\Big(-\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)D_t u^m\big(\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta\big)D_t v^l$$

$$+\big(a_1 - 2\sqrt{a_0a_2}\big)\nabla D_t u^m\nabla D_t v^l + b_0 D_t u^m v^l - b_1\nabla D_t u^m\nabla v^l + b_2 D_t\Delta u^m\Delta v^l$$

$$+d_0u^mv^l - d_1\nabla u^m\nabla v^l + d_2\Delta u^m\Delta v^l - d_3\nabla\Delta u^m\nabla\Delta v^l\Big)\,d\overline{x} = \int_{Q_T} f(t,x)v^l(t,x)\,d\overline{x}$$

$$+\int_G \big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)v^l(0,x)dx$$
$$-\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v^l(0,x)dx, \quad \overline{x}=(t,x), \quad m\geq l.$$

Учитывая (4.13), будем иметь

$$\int_{Q_T}\Big(-\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_t\widetilde{u}^N\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)D_tv^l$$
$$+\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\nabla D_t\widetilde{u}^N\nabla D_tv^l+b_0D_t\widetilde{u}^Nv^l-b_1\nabla D_t\widetilde{u}^N\nabla v^l+b_2D_t\Delta\widetilde{u}^N\Delta v^l$$
$$+d_0\widetilde{u}^Nv^l-d_1\nabla\widetilde{u}^N\nabla v^l+d_2\Delta\widetilde{u}^N\Delta v^l-d_3\nabla\Delta\widetilde{u}^N\nabla\Delta v^l\Big)\,d\overline{x}=\int_{Q_T}f(t,x)v^l(t,x)d\overline{x}$$
$$+\int_G \big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)\varphi_2(x)\big(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta\big)v^l(0,x)dx$$
$$-\big(a_1-2\sqrt{a_0a_2}\big)\int_G \nabla\varphi_2(x)\nabla v^l(0,x)\,dx, \quad \overline{x}=(t,x).$$

В силу того, что $\widetilde{u}^N$ сильно сходится к u в норме $W_2^{1,3}(Q_T)$ и $D_t\Delta\widetilde{u}^N$ сильно сходится к $D_t\Delta u$, в норме $L_2(Q)$ при $N\to\infty$, получим, что соотношение (2.9) выполняется для функций $v(t,x)=v^l(t,x)$, где $v^l(t,x)$ определены в (4.21).

Докажем справедливость (2.9) для произвольной функции $v(t,x)\in C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$, удовлетворяющей (2.3).

Напомним, что $\{v_p(x)\}$ — базис в $\mathring{W}_2^3(G)$. Ортонормируем его в $\mathring{W}_2^3(G)$ обозначим через $\{\widetilde{v}_p(x)\}$. Следовательно, учитывая, что для $t\in(0,T)$ $v(t,x)\in\mathring{W}_2^3(G)$, $D_tv(t,x)\in\mathring{W}_2^3(G)$, получим следующие представления:

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a_k}(t)\widetilde{v_k}(x), \tag{4.22}$$

$$D_tv(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}D_t\widetilde{a_k}(t)\widetilde{v_k}(x), \tag{4.23}$$

где $\widetilde{a_k}(t)$ —коэффициенты Фурье функции $v(t,x)$, т.е.

$$\widetilde{a_k}(t)=\big\langle v(t,x),\widetilde{v_k}(x)\big\rangle_{\mathring{W}_2^3(G)},$$

$<\cdot,\cdot>_{\mathring{W}_2^3(G)}$ — скалярное произведение в $\mathring{W}_2^3(G)$. Обозначим через

$$v_l(t,x)=\sum_{k=1}^{l}\widetilde{a_k}(t)\widetilde{v_k}(x), \qquad D_tv_l(t,x)=\sum_{k=1}^{l}D_t\widetilde{a_k}(t)\widetilde{v_k}(x),$$

частичные суммы рядов (4.22) и (4.23) соответственно. Имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\widetilde{a_k}(t)|^2+|D_t\widetilde{a_k}(t)|^2\Big)=\big\|v(t,x),W_2^3(G)\big\|^2+\big\|D_tv(t,x),W_2^3(G)\big\|^2. \quad (4.24)$$

В силу неравенства Стеклова имеем

$$\big\|v(t,x)-v_l(t,x),W_2^3(G)\|^2+\big\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),L_2(G)\big\|^2$$
$$+\big\|D_t\Delta v(t,x)-D_t\Delta v_l(t,x),L_2(G)\big\|^2\leqslant\big\|v(t,x)-v_l(t,x),W_2^3(G)\big\|^2$$
$$+C\big\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),W_2^3(G)\big\|^2=\sum_{k=l+1}^{\infty}\Big(\big|\widetilde{a_k}(t)\big|^2+C\big|D_t\widetilde{a_k}(t)\big|^2\Big).$$

В силу (4.24) для любого $t\in(0,T)$ ряд сходится. Интегрируем по t от 0 до T

$$\int_0^T\Big[\big\|v(t,x)-v_l(t,x),W_2^3(G)\big\|^2+\big\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),L_2(G)\big\|^2$$
$$+\big\|D_t\Delta v(t,x)-D_t\Delta v_l(t,x),L_2(G)\big\|^2\Big]\,dt$$
$$\leqslant\int_0^T\sum_{k=l+1}^{\infty}\Big(\big|\widetilde{a_k}(t)\big|^2+C\big|D_t\widetilde{a_k}(t)\big|^2\Big)\,dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\|v(t,x)-v_l(t,x),W_2^{1,3}(Q_T)\|\to 0,\\ &\|D_t\Delta v(t,x)-D_t\Delta v_l(t,x),L_2(Q_T)\|\to 0\end{aligned} \quad (4.25)$$

при $l\to\infty$. Полагая в (4.21), в качестве $v^l(t,x)$ частичную сумму ряда (4.22) и учитывая сходимости (4.25), получим требуемое равенство (2.9) для любой $v(t,x)\in C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$, удовлетворяющей (2.3). Поскольку $C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$ всюду плотно в $W_2^{1,3}(Q_T)$ (см., например, [9]), то соотношение (2.9) выполняется для произвольной функции $v(t,x)\in W_{2,add}^{1,3}(Q_T)$, удовлетворяющей (2.3).

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе, а также выражают благодарность Х.Г. Умарову за указания литературы по выводу обобщенного уравнения Буссинеска.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 30-51
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 30-51

Список литературы

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. *Pereira P. J. S., Lopes N. D., Trabuco L.* Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // *Nonlinear Dyn.* 2015. V. 82. P. 783–818.

3. *Умаров. Х. Г.* Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // *Сиб. матем. журн.* 2022. Т. 63, № 3. С. 672–689.

4. *Polat N., Piskin E.* Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equation // *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 2015. V. 31. P. 735-–746.

5. *Wang S., Xue H.* Global solution for a generalized Boussinesq equation // *Appl. Math. Comput.* 2008, V. 204, N 1. P. 130–136.

6. *Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики* М.: Наука, 1973.

7. *Демиденко Г. В. Пространства Соболева и обобщённые решения.* Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.

8. *Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных* М.: Наука, 1976.

9. *Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

10. *Треногин В. А. Функциональный анализ.* М.: Физматлит, 2007.

11. *Иосида К. Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967.

12. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.* Новосибирск: Наука, 1984.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 30-51
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 30-51

References

1. *Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, Russia, 1998; English transl. Marcel Dekker, New York and Basel, 2003.

2. *Pereira P. J. S., Lopes N. D., Trabuco L.* Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // *Nonlinear Dyn.* 2015. V. 82. P. 783–818.

3. *Umarov Kh. G.* Blow-up and global solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic equation related to the generalized Boussinesq equation // *Siberian Math. J.* 2022. V 63, N 3. P. 559–574.

4. *Polat N., Piskin E.* Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equation // *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 2015. V. 31. P. 735-–746.

5. *Wang S., Xue H.* Global solution for a generalized Boussinesq equation // *Appl. Math. Comput.* 2008, V. 204, N 1. P. 130–136.

6. *Ladyzhenskaya O. A. The boundary value problems of mathematical physics.* Transl. from the Russian by Jack Lohwater.(English) Applied Mathematical Sciences, 49. New York etc.: Springer-Verlag. XXX, 322 p. DM 198.00, 1985.

7. *Demidenko G. V. Sobolev Spaces and Generalized Solutions.* Publishing office of the Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2015 Russian.

8. *Mikhailov V. P. Partial differential equations*, Nauka, Moscow, 1976 Russian; English transl. Mir, Moscow, 1978.

9. *Sobolev S. L. Introduction to the Theory of Cubature formulas*, Nauka, Moscow, 1974 Russian.

10. *Trenogin V. A. Functional analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2007 Russian.

11. *Yosida K. Functional analysis.* Mir, Moscow, 1967 Russian; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995 English.

12. *Uspenskii S. V., Demidenko G. V., and Perepelkin V. G. Embedding Theorems and Applications to Differential Equations.* Nauka, Novosibirsk, 1984 Russian.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 30-51
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 30-51

Информация об авторе

Лина Николаевна Бондарь, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN-код: 7367-8790, AuthorID: 493872

Scopus Author ID 22633505200

Синь Ма, аспирант

Author Information

Lina N. Bondar, Candidate of Mathematics, Associate Professor

SPIN-код: 7367-8790, AuthorID: 493872

Scopus Author ID 22633505200

Xin Ma, PhD student

Статья поступила в редакцию 30.07.2024;
одобрена после рецензирования 16.09.24; принята к публикации 26.09.2024

The article was submitted 30.07.2024;
approved after reviewing 16.09.24; accepted for publication 26.09.2024