Научная статья
УДК 517.938
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-5-15

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Алина Витальевна Глубоких

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия

a.glubokikh@g.nsu.ru

Аннотация

Исследовано строение фазового портрета трехмерной динамической системы, моделирующей функционирование простейшего молекулярного репрессилятора. Доказано существование единственной асимптотически устойчивой стационарной точки, выявлены условия существования и устойчивости замкнутой траектории, лежащей в дополнении к области притяжения этой точки.

Ключевые слова и фразы

модели генных сетей, динамические системы, фазовые портреты, стационарные точки, периодические решения, ступенчатые функции, нелокальные колебания.

Для цитирования

Глубоких А.В. Об устойчивости нелокальных колебаний в одной кусочно-линейной динамической системе // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 5-15. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-5-15

ON THE STABILITY OF NONLOCAL OSCILLATIONS IN ONE PIECEWISE-LINEAR DYNAMICAL SYSTEM

Alina V. Glubokikh

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

a.glubokikh@g.nsu.ru

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 5-15
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 5-15

Abstract

We study the structure of the phase portrait of a three-dimensional dynamical system simulating the functioning of a simple molecular repressilator. The existence of a unique asymptotically stable equilibrium point is proven. Conditions for the existence and stability of a closed trajectory lying in the complement to the domain of attraction of this point are obtained.

Keywords

gene network models, dynamical systems, phase portraits, equilibrium points, periodic solutions, step functions, nonlocal oscillations.

For citation

Glubokikh A. V. On the stability of nonlocal oscillations in one piecewise-linear dynamical system // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 5-15. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-5-15

§ 1. Введение и предварительные сведения

Обнаружение периодических решений и исследование их на единственность и устойчивость являются одними из главных проблем качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Даже в небольших размерностях возникают сложности при описании поведения траекторий нелинейных систем, см. [1, 2]. В данной работе рассматриваются модели простейших молекулярных репрессиляторов, представленные в виде трехмерных систем уравнений биохимической кинетики:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1(L_1(x_3) - x_1); \quad \frac{dx_2}{dt} = k_2(L_2(x_1) - x_2); \quad \frac{dx_3}{dt} = k_3(L_3(x_2) - x_3); \quad (1)$$

где $x_j(t)$ — концентрации компонент кольцевой генной сети, k_j — положительные константы, характеризующие скорость разложения веществ, функции $L_j(w)$ монотонно убывают, что соответствует отрицательным регуляторным связям между компонентами сети. Здесь и в дальнейшем $j = 1, 2, 3$ и считаем, что $j - 1 = 3$ при $j = 1$.

Модели с гладкими правыми частями изучались в большом количестве публикаций, например, [1, 3, 4]. Системы вида (1) с «одноступенчатыми» функциями $L_j(w)$ и их многомерные аналоги рассматривались в [3, 5, 6], где были установлены условия для существования, единственности и устойчивости замкнутых траекторий, а также описаны гомеоморфные торам инвариантные окрестности этих кривых. Подобные динамические системы с многоступенчатыми правыми частями возникают при моделировании широкого круга молекулярно-генетических систем, см. [7], где также было отмечено, что число порогов в модели может оказаться больше числа компонент генной сети. В частности, в работе [8] была описана «двухступенчатая» регуляторная связь в функционировании бактериофага лямбда. Основная цель данной работы заключается в установлении качественных различий между системами с «одноступенчатыми» правыми частями, которые изучались ранее, и системами с бо́льшим числом порогов на примере систем вида (1) с «двухступенчатыми» функциями $L_j(w)$. Особое внимание будет уделено выявлению условий, при которых в фазовом портрете системы будет наблюдаться замкнутая траектория, то есть цикл.

§ 2. Симметричная модель с двухступенчатой правой частью

Рассмотрим симметричную относительно циклических перестановок x_j динамическую систему:

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3; \tag{2}$$

где L — двухступенчатая монотонно убывающая функция, определенная следующим образом:

$$L(w) = \begin{cases} 2c, & w \in [0, c-\varepsilon); \\ c, & w \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon); \\ 0, & w \in [c+\varepsilon, +\infty); \end{cases}$$

$0 < \varepsilon < c$. Для начала мы рассматриваем симметричные системы как наиболее простой вид моделей исследуемых генных сетей с целью в дальнейшем распространить полученные здесь результаты на системы более общего вида, как это было сделано в [5, 9] для систем с одноступенчатыми функциями.

Заметим, что куб $Q = [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ является положительно инвариантной областью, то есть траектории всех его точек с ростом t остаются внутри Q. Этот факт устанавливается простой проверкой знаков производных на границах куба, подобные рассуждения проводились в [10, 11]. Разобьем этот куб плоскостями вида $x_j = c - \varepsilon$ и $x_j = c + \varepsilon$ на 27 блоков, которые будем нумеровать мультииндексами $\{s_1 s_2 s_3\}$ по правилу:

$$s_j = \begin{cases} 0, & x_j \in [0, c-\varepsilon); \\ 1, & x_j \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon); \\ 2, & x_j \in [c+\varepsilon, 2c]. \end{cases}$$

При этом в каждом таком блоке система принимает простой вид, что позволяет выписать точное решение. Так, например, в блоке $\{210\}$ система и решение задачи Коши с начальной точкой $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \in \{210\}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2c - x_1; \\ \dot{x_2} = -x_2; \\ \dot{x_3} = c - x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = 2c - (2c - x_1(0))e^{-t}; \\ x_2(t) = x_2(0)e^{-t}; \\ x_3(t) = c - (c - x_3(0))e^{-t}. \end{cases}$$

Можно заметить, что траектории внутри блока прямолинейны, а их продолжения с ростом t стремятся к точке $(2c, 0, c)$. Аналогичные рассуждения справедливы и для любого другого блока и дают представление о поведении траекторий системы в целом. Одним из важных результатов является следующий факт:

Лемма. *Блок $\{111\}$ является положительно инвариантной областью системы (2) и содержит единственную неподвижную точку $S = (c, c, c)$ системы. Точка S является асимптотически устойчивой.*

Рассмотрим следующую диаграмму, составленную из 12-ти блоков:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{220\} & \longrightarrow & \{210\} & \longrightarrow & \{200\} & \longrightarrow & \{201\} & \longrightarrow & \{202\} \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ \{120\} & & & & & & & & \{102\} \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ \{020\} & \longleftarrow & \{021\} & \longleftarrow & \{022\} & \longleftarrow & \{012\} & \longleftarrow & \{002\} \end{array} \qquad (3)$$

Обозначим за W объединение этих блоков, и пусть $F_0 = \{120\} \cap \{220\}$, $F_1 = \{220\} \cap \{210\}$ и так далее до $F_{12} = F_0$. Стрелки диаграммы описывают направление движения точек из одного блока в соседний, а композиция сдвигов точек вдоль их траекторий внутри каждого блока представляет собой отображение Пуанкаре $\Pi : F_0 \to F_0$. Докажем, что у этого отображения есть единственная неподвижная точка при условии $3\varepsilon < c$, что равносильно существованию замкнутой траектории системы (2).

Здесь и всюду далее будем рассматривать только те траектории, которые не пересекают ребра блоков.

Введем в каждой общей грани блоков диаграммы (3) новую систему координат $O_kU_kV_k$ следующим образом:

- на грани F_0 начало координат O_0 совпадает с точкой $(c+\varepsilon, c+\varepsilon, c-\varepsilon)$, ось O_0U_0 направлена против оси Ox_3, ось O_0V_0 сонаправлена с осью Ox_2. В этих координатах грань F_0 задается неравенствами $0 \le U_0 \le c - \varepsilon$ и $0 \le V_0 \le c - \varepsilon$;

- на грани F_1 начало координат O_1 совпадает с точкой O_0, ось O_1U_1 совпадает с O_0U_0, ось O_1V_1 параллельна оси Ox_1;
- на грани F_2 начало координат O_2 совпадает с точкой $(c+\varepsilon, c-\varepsilon, c-\varepsilon)$, ось O_2U_2 параллельна O_1U_1, ось O_2V_2 параллельна оси Ox_1;
- на грани F_3 начало координат O_3 совпадает с точкой O_2, ось O_3U_3 направлена против оси Ox_2, ось O_3V_3 совпадает с O_2V_2;
- на грани F_4 начало координат O_4 совпадает с точкой $(c+\varepsilon, c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, ось O_4U_4 параллельна O_3U_3, ось O_4V_4 параллельна оси O_3V_3.

В силу симметрии системы (2) и диаграммы (3) на остальных гранях новые координаты определяются аналогичным образом, и $O_{12}U_{12}V_{12}$ есть в точности $O_0U_0V_0$. Сдвиги точек грани F_k до грани F_{k+1} вдоль их траекторий описываются дробно-линейными функциями:

- Переход $F_0 \to F_1$:
  $U_1 = \big(U_0(c+\varepsilon) + V_0(c-\varepsilon)\big)(c+\varepsilon+V_0)^{-1};\ V_1 = V_0(c-\varepsilon)(c+\varepsilon+V_0)^{-1}.$
- Переход $F_1 \to F_2$:
  $U_2 = \big(U_1(c-\varepsilon) - 2\varepsilon^2\big)(c+\varepsilon)^{-1};\ V_2 = (V_1+2\varepsilon)(c-\varepsilon)(c+\varepsilon)^{-1}.$
- Переход $F_2 \to F_3$:
  $U_3 = U_2(c-\varepsilon)(c+\varepsilon+U_2)^{-1};\ V_3 = \big(V_2(c+\varepsilon) + U_2(c-\varepsilon)\big)(c+\varepsilon+U_2)^{-1}.$
- Переход $F_3 \to F_4$:
  $U_4 = (U_3+2\varepsilon)(c-\varepsilon)(c+\varepsilon)^{-1};\ V_4 = \big(V_3(c-\varepsilon) - 2\varepsilon^2\big)(c+\varepsilon)^{-1}.$

Если U_0^*, V_0^* — решение системы алгебраических уравнений

$$U_0 = U_4,\ V_0 = V_4, \tag{4}$$

то $U_0^* = U_{12}^*,\ V_0^* = V_{12}^*$, то есть точка $M^* = (c+\varepsilon, c+\varepsilon+V_0^*, c-\varepsilon-U_0^*)$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ — неподвижная точка отображения Пуанкаре П, а ее траектория представляет собой цикл системы (2). Далее будем опускать нижний индекс «0».

Решения системы уравнений (4) можно представить как точки пересечения двух гипербол:

$$A_{11}U^2+2A_{12}UV+A_1U+A_2V+A_0=0;\ 2B_{12}UV+B_{22}V^2+B_1U+B_2V+B_0=0;$$

где

$$\begin{aligned}
&A_{11} = (c+\varepsilon)^2(c-\varepsilon), && B_{12} = 0.5(c+\varepsilon)^2(c-\varepsilon),\\
&A_{12} = c^2(c+\varepsilon), && B_{22} = 2c^2(c+\varepsilon),\\
&A_1 = 2\varepsilon(c+\varepsilon)^2(2c-\varepsilon), && B_1 = -(c^2-\varepsilon^2)(c^2-2c\varepsilon-\varepsilon^2),\\
&A_2 = -(c^4-\varepsilon^4), && B_2 = 8c^3\varepsilon-(c-\varepsilon)^2(c+\varepsilon)^2,\\
&A_0 = -2c\varepsilon(c+\varepsilon)^2(c-\varepsilon); && B_0 = -2\varepsilon(c+\varepsilon)(c^3-3c^2\varepsilon-c\varepsilon^2+\varepsilon^3);
\end{aligned}$$

причем эти точки должны лежать внутри грани F_0, то есть $(U_0^*, V_0^*) \in K$, где квадрат $K = (0, c-\varepsilon) \times (0, c-\varepsilon)$. Будем называть первую кривую гиперболой $\mathcal{A}$, а вторую — гиперболой $\mathcal{B}$.

Несложно найти асимптоты данных кривых в явном виде. Для гиперболы $\mathcal{A}$ получаем:

$$\alpha_1 : U = -0.5A_2A_{12}^{-1}, \;\; \alpha_2 : A_{11}U + 2A_{12}V = 0.5A_2A_{11}A_{12}^{-1} - A_1,$$

и для гиперболы $\mathcal{B}$:

$$\beta_1 : V = -0.5B_1B_{12}^{-1}, \;\; \beta_2 : B_{22}V + 2B_{12}U = 0.5B_1B_{22}B_{12}^{-1} - B_2,$$

причем прямые α_2 и β_2 параллельны и не пересекают рассматриваемую область. При любом значении параметра $\varepsilon \in (0, c)$ вертикальная асимптота α_1 проходит строго внутри квадрата K, а горизонтальная асимптота β_1 проходит ниже уровня $V = c - \varepsilon$ и при $\varepsilon > c(1+\sqrt{2})^{-1}$ не попадает в квадрат, см. рис. 1. При условии $3\varepsilon < c$ существует единственная точка пересечения двух гипербол внутри рассматриваемой области, иначе таких точек нет. Таким образом, доказан основной результат работы:

Теорема 1. *Если $3\varepsilon < c$, то динамическая система* (2) *имеет единственную кусочно-линейную замкнутую траекторию в области W. При этом в блоке* $\{111\}$ *содержится устойчивая стационарная точка $S = (c, c, c)$.*

Вопрос единственности цикла во всем кубе Q требует отдельного изучения поведения траекторий в области $Q \setminus W$.

§ 3. Устойчивость найденного цикла

Рассмотрим матрицу Якоби $J = \dfrac{\partial(U_4, V_4)}{\partial(U_0, V_0)}$ в точке (U_0^*, V_0^*):

$$J = a^2 \cdot \begin{pmatrix} a & ab \\ b & b^2 + a \end{pmatrix};$$

где

$$a = (c-\varepsilon)(c+\varepsilon+V_0^*)^{-1}, \;\; b = (c-\varepsilon-U_0^*)(c+\varepsilon+V_0^*)^{-1}.$$

Чтобы доказать устойчивость найденного в области W цикла, достаточно проверить, что собственные значения матрицы J вещественны, положительны и меньше единицы. Заметим, что $det\ J = a^6 < 1$. Тогда из

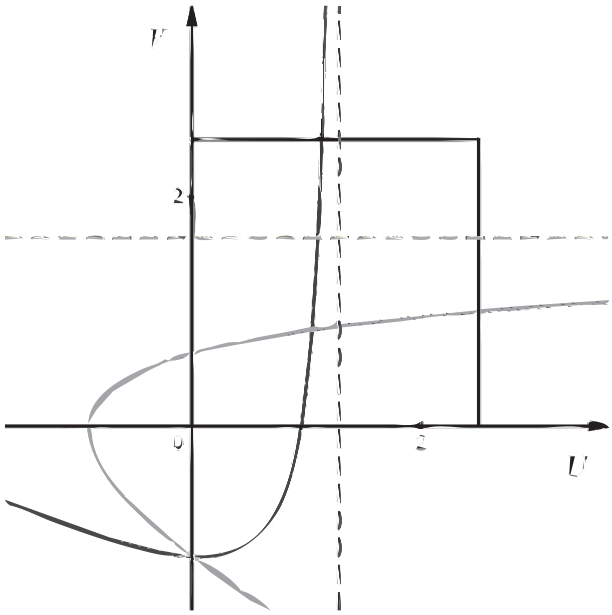

Рис. 1: Пересечение двух гипербол в квадрате K, где $c = 3$, $\varepsilon = 0.5$. Кривая с вертикальной асимптотой — гипербола $\mathcal{A}$, кривая с горизонтальной асимптотой — гипербола $\mathcal{B}$.

теоремы Фробениуса–Перрона для матриц с положительными коэффициентами, см. [12], следует, что собственные числа вещественные, простые и положительные, а максимальному собственному значению соответствует собственный вектор с положительными компонентами. Очевидно, что наименьшее из собственных чисел обязано быть меньше единицы, остается проверить неравенство $\lambda_{max} < 1$.

Представим λ_{max} в следующем виде:

$$\lambda_{max} = \left(0.5a(\sqrt{b^2 + 4a} + b)\right)^2.$$

Тогда необходимое нам неравенство $0.5a(\sqrt{b^2 + 4a} + b) < 1$ эквивалентно условию на (U_0^*, V_0^*):

$$(c + \varepsilon + V_0^*)^3 + (c - \varepsilon)U_0^* V_0^* + (c^2 - \varepsilon^2)U_0^* - (c - \varepsilon)^2 V_0^* - 2c(c - \varepsilon)^2 > 0,$$

которое выполнено при любом $0 < \varepsilon < c/3$. Докажем это.

Заметим для начала, что

$$(c + \varepsilon + V)^3 + (c - \varepsilon)UV + (c^2 - \varepsilon^2)U - (c - \varepsilon)^2 V - 2c(c - \varepsilon)^2$$

$$> (c + \varepsilon + V)^3 - (c - \varepsilon)^2 V - 2c(c - \varepsilon)^2$$

$$= V^3 + 3(c+\varepsilon)V^2 + 2(c^2 + 4c\varepsilon + \varepsilon^2)V + (c+\varepsilon)^3 - 2c(c-\varepsilon)^2$$
$$> 2(c+\varepsilon)^2 V + (c+\varepsilon)^3 - 2(c+\varepsilon)(c-\varepsilon)^2.$$

Получившаяся функция от V возрастает и обращается в ноль при $V_c = (c-\varepsilon)^2(c+\varepsilon)^{-1} - 0.5(c+\varepsilon)$. Если покажем, что $V_c < V_0^*$, то нужное нам неравенство будет выполнено. Для этого подставим V_c в уравнение для гиперболы $\mathcal{B}$ и найдем соответствующее ему значение $U_c = -\varepsilon \cdot (2c^3 + c^2\varepsilon - 12c\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3)(c^3 + c^2\varepsilon - 5c\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3)^{-1}$. Точка (U_c, V_c) лежит на одной ветви гиперболы с точкой (U_0^*, V_0^*) в силу $V_c < -0.5B_1B_{12}^{-1} = \big((c-\varepsilon)^2 - 2\varepsilon^2\big)(c+\varepsilon)^{-1}$, что равносильно неравенству $c - \varepsilon > 0$. Остается заметить, что из $3\varepsilon < c$ следует $U_c < 0$. Как хорошо видно на рис. 1, отрицательным значениям U на этой ветви гиперболы $\mathcal{B}$ соответствуют меньшие значения V, чем в квадрате K, что и требовалось доказать. Таким способом была получена

Теорема 2. *Если $3\varepsilon < c$, то в области W динамическая система* (2) *имеет единственную замкнутую траекторию. Эта траектория кусочно-линейна и устойчива.*

§ 4. Заключение

Найденный цикл называют нелокальным колебанием, то есть фазовой траекторией, расположенной достаточно далеко от стационарных точек рассматриваемой системы, подробнее см. [2, 13].

Полученные результаты допускают распространение на системы более общего вида, в частности, с бóльшим числом порогов, см. [11], при этом наблюдается увеличение числа замкнутых траекторий в фазовом портрете динамической системы. Ранее результаты о неединственности циклов аналогичных систем с одноступенчатыми или гладкими функциями в правых частях были получены только для размерностей, начиная с пяти, см. [6, 14].

Список литературы

1. *Системная компьютерная биология.* /Под ред. Н. А. Колчанова, С. С. Гончарова, В. А. Иванисенко, В. А. Лихошвая. Новосибирск: СО РАН, 2008.

2. *Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T.* Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems.// *Physical Letters A.* 2015. V. 379, N 40–41. P. 2591–2596.

3. *Glass L., Pasternack J. S.* Stable Oscillations in Mathematical Models of Biological Control Systems.// *J. Math. Biology.* 1978. V. 6. P. 207–223.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 278, № 1, С. 5-15
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 5-15

4. *Golubyatnikov V., Likhoshvai V., Ratushny A.* Existence of Closed Trajectories in 3-D Gene Networks.// *The journal of three dimensional images.* 2004. V. 18, N 4. P. 96–101.

5. *Голубятников В. П., Иванов В. В., Минушкина Л. С.* О существовании цикла в одной несимметричной модели кольцевой генной сети.// *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* 2018. Т. 18, № 3. С. 27–35.

6. *Golubyatnikov V. P., Gradov V. S.* Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks.// *Siberian Advances in Mathematics.* 2021. V. 31, N 1. P. 1–12.

7. *Tchuraev R. N., Galimzyanov A. V.* Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models.// *Molecular Biology.* 2001. V. 35, N 6. P. 933–939.

8. *Tchuraev R. N., Ratner V. A.* A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression.// *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation.* /Ed. K.Bellman. Berlin: Verlag, 1983. P. 64–80.

9. *Иванов В. В.* Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети.// *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25, № 3. С. 25–32.

10. *Голубятников В. П., Кириллова Н. Е.* О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей.// *Сиб. журн. чист. и прикл. матем..* 2018. Т. 1,. № 5. С. 54–63.

11. *Голубятников В. П.* О неединственности циклов в трехмерных моделях кольцевых генных сетей.// *Челябинский Физ.-Мат. Журнал.* 2024. Т. 9, № 1. С. 23–34.

12. *Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.* Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1954.

13. *Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.* М.: Наука, 1964.

14. *Акиньшин А. А., Голубятников В. П.* Циклы в симметричных динамических системах.// *Сибирский Журнал Чистой и Прикладной Математики.* 2012. Т. 12, № 2. С. 3–12.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 5-15
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 5-15

References

1. *Computational systems biology.* /Eds. N. Kolchanov, C. Goncharov, V. Ivanisenko, V. Likhoshvai. Novosibirsk: SB RAS, 2008.

2. *Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T.* Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems.// *Physical Letters A.* 2015. V. 379, N 40–41. P. 2591–2596.

3. *Glass L., Pasternack J. S.* Stable Oscillations in Mathematical Models of Biological Control Systems.// *J. Math. Biology.* 1978. V. 6. P. 207–223.

4. *Golubyatnikov V., Likhoshvai V., Ratushny A.* Existence of Closed Trajectories in 3-D Gene Networks.// *The journal of three dimensional images.* 2004. V. 18, N 4. P. 96–101.

5. *Golubyatnikov V. P., Ivanov V. V., Minushkina L. S.* On the existence of a cycle in one asymmetric gene network model.// Siber. *J. Pure Appl. Math.* 2018. V. 18, N 3. P. 27–35.

6. *Golubyatnikov V. P., Gradov V. S.* Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks.// *Siberian Advances in Mathematics.* 2021. V. 31, N 1. P. 1–12.

7. *Tchuraev R. N., Galimzyanov A. V.* Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models.// *Molecular Biology.* 2001. V. 35, N 6. P. 933–939.

8. *Tchuraev R. N., Ratner V. A.* A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression.// *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation.* /Ed. K.Bellman. Berlin: Verlag, 1983. P. 64–80.

9. *Ivanov V. V.* An attracting limit cycle of an odd-dimensional circular gene network model.// *J. Appl. Ind. Math.* 2022. V. 25, N 3. P. 25–32.

10. *Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E.* On cycles in models of functioning of circular gene networks.// *J. Math. Sci.* 2020. V. 246, N 6. P. 779–787.

11. *Golubyatnikov V. P.* On the non-uniqueness of cycles in three-dimensional models of circular gene networks.// *Chelyabinsk Phys. and Math. J.* 2024. V. 9, N 1. P. 23–34.

12. *Gantmacher F. Theory of matrices.* AMS Chelsea publishing, 1959.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 278, № 1, С. 5-15
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 5-15

13. *Pliss V. A. Nonlocal problems in the theory of oscillations.* NY: Academic Press, 1966.

14. *Akin'shin A. A., Golubyatnikov V. P.* Cikly v simmetrichnyh dinamicheskih sistemah.// *Vestnik NGU.* 2012. T. 12, № 2. S. 3–12.

Информация об авторе

Алина Витальевна Глубоких, студентка, бакалавр
Scopus Author ID 58988707200

Author Information

Alina V. Glubokikh, Student, Bachelor
Scopus Author ID 58988707200

Статья поступила в редакцию 14.09.24;
одобрена после рецензирования 22.12.24; принята к публикации 29.01.2025

The article was submitted 14.09.24;
approved after reviewing 22.12.24; accepted for publication 29.01.2025